

Die Spur der Fünf

Lösungsblatt

Erkundung 1: Quadrieren ohne Ende

Die sechs Reihen: $5 \rightarrow 25 \rightarrow 625 \rightarrow 390625 \rightarrow 152587890625 \rightarrow 23\,283\,064\,365\,386\,962\,890\,625$. Die Endziffern frieren von rechts her ein und tauen nie wieder auf.

Erkundung 2: Ein neues Lineal erfinden

a) 20, 600, 390 000, 152 587 500 000 – teilbar durch $10^1, 10^2, 10^4, 10^5$. b) „Nah“ heißt: Die Differenz ist durch eine hohe Zehnerpotenz teilbar – gleichwertig: viele gemeinsame Endziffern.

Erkundung 3: Mit dem neuen Lineal messen

a) 1 000 000 ist 10-adisch kleiner als 7; Sortierung (kleinste zuerst): 1 000 000, 100, 10, dann 1 und 3 gleichauf. b) $10^n \rightarrow 0$. c) Ein Objekt mit unendlich vielen Ziffern nach links – keine gewöhnliche Zahl.

Erkundung 4: Die unmögliche Gleichung

$8212890625 \cdot 8212890624 = 67\,451\,572\,410\,000\,000\,000$ – das Produkt endet auf *zehn Nullen*. 10-adisch: $F \cdot (F - 1) = 0$, obwohl keiner der Faktoren null ist (F endet auf 5, $F - 1$ auf 4): **Nullteiler!** Gleichwertig: $F^2 = F$.

Erkundung 5: Alte Bekannte in der neuen Welt

a) $\dots 9999 + 1 = \dots 0000$, also $\dots 9999 = -1$. b) $-2 = \dots 9998$, $-12 = \dots 99988$, $-100 = \dots 99900$. c) In jedes Kästchen gehört eine 1: $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \dots 1111_2 = -1$ – die „unsinnige“ Gleichung von letzter Woche ist 2-adisch wahr.

Erkundung 6: Brüche ohne Komma – und zwei Verdächtige

a) $\frac{1}{3} = \dots 66666667$ (alle Überträge 2); Probe: $3 \cdot \dots 66666667 = \dots 00000001$. b) $\frac{1}{7} = \dots 42857143$ – die Periode 142857 von $0,\overline{142857}$, nach links gelesen. c) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ scheitern schon an der letzten Ziffer ($2d$ endet nie auf 1, $5d$ nur auf 0 oder 5). Verdächtige: 2 und 5.

Bonus: Wurzelziehen in der neuen Welt

a) Endziffern von d^2 : 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 – die Ziffern 2, 3, 7, 8 kommen nie vor. Also gibt es kein 10-adisches $\sqrt{2}$. b) Ein gangbarer Pfad: $1 \rightarrow 21 \rightarrow 821 \rightarrow 3821 \rightarrow 53821$ (oder 03821); Kontrollen: $21^2 = 441$, $821^2 = 674\,041$, $3821^2 = 14\,600\,041$. Sackgasse z. B. 321. Zweiter Ast: $9 \rightarrow 29 \rightarrow 429 \rightarrow \dots$. c) Die Endungen $\square 3$ und $\square 7$ liefern als letzte zwei Ziffern nur 09, 29, 49, 69, 89 – nie 99. Also hat -1 keine Wurzel.

Erkundung 7: Die verbotene Formel, rehabilitiert

a) $1, 11, 111, \dots \rightarrow \dots 1111$. b) $9 \cdot \dots 1111 = \dots 9999 = -1$, also $\dots 1111 = -\frac{1}{9}$. c) $\frac{1}{1-10} = -\frac{1}{9}$ – die verbotene Formel stimmt 10-adisch exakt.

Erkundung 8: Finale – Wer ist der Täter?

a) 0, 1, 25, 76 (letzte Ziffer muss 0, 1, 5 oder 6 sein). b) 25 = Endziffern von F ; 76 = Endziffern von $F' = 1 - F = \dots 1787109376$; Checks: $76^2 = 5776$, $376^2 = 141\,376$. c) $F \cdot F' = F(1 - F) = F - F^2 = F - F = 0$. d) Basis 7: nur 0 und 1 (auch mod 49).

Der Täter: die Zerlegung $10 = 2 \cdot 5$. Jede 10-adische Zahl führt ein Doppelleben (2er-Welt und 5er-Welt); F ist „0 aus Sicht der 5, 1 aus Sicht der 2“. In Primzahlbasen verschwinden Geisterzahlen und Nullteiler.