

Erkundung 2: Ein neues Lineal erfinden

Erkundet

- a) Berechne die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder:

$$25 - 5, \quad 625 - 25, \quad 390625 - 625, \quad 152587890625 - 390625.$$

Durch welche *Zehnerpotenz* ist jede Differenz teilbar?

- b) Auf dem Zahlenstrahl entfernen sich die Glieder also immer weiter voneinander. Erfinde einen neuen Begriff von „Abstand“, in dem sie sich stattdessen *immer näher* kommen. *Tipp:* Teil a) sagt euch, was an den Differenzen besonders ist.

Eure Vermutung

Unser Abstandsbegriff: Zwei Zahlen liegen nahe beieinander, wenn ...

.....
.....

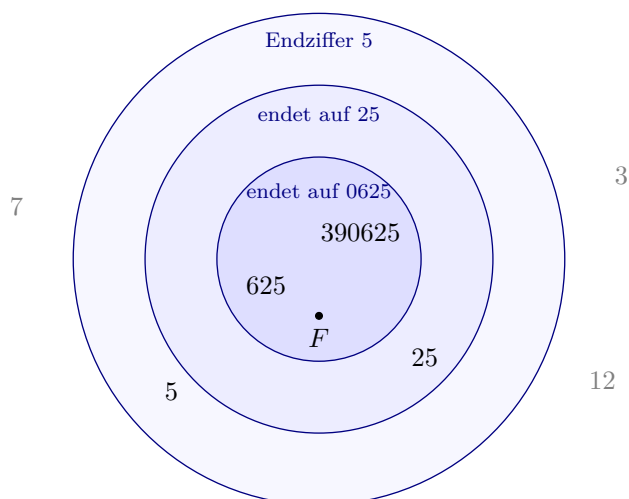
Erkundung 3: Mit dem neuen Lineal messen

Werkzeug

Das 10-adische Lineal. Wir erklären eine Zahl für **klein**, wenn sie durch eine *hohe* Zehnerpotenz teilbar ist:

1 ist groß, 10 kleiner, 100 noch kleiner, 10 000 000 winzig.

Zwei Zahlen sind sich **nah**, wenn ihre *Differenz* klein ist – wenn sie also in *vielen Endziffern übereinstimmen*.



Das 10-adische Lineal als Zielscheibe: Wer mehr Endziffern mit F teilt, sitzt weiter innen – die Quadrier-Folge springt Kreis für Kreis nach innen. Zahlen mit anderer Endziffer (3, 7, 12) bleiben draußen.

Erkundet

- Welche Zahl ist 10-adisch kleiner: 7 oder 1 000 000? Sortiert dann 3, 10, 1, 100, 1 000 000 der 10-adischen Größe nach.
- Wogegen streben die Potenzen 10, 100, 1000, 10000, ... mit diesem Lineal?
- Mit dem neuen Lineal rücken die Glieder unserer Quadrier-Folge immer enger zusammen – sie müsste also gegen *etwas* streben. Was für ein Objekt müsste dieser Grenzwert sein? Wie viele Ziffern hätte er?

Erkundung 4: Die unmögliche Gleichung

Werkzeug

Neue Zahlen. Eine **10-adische Zahl** ist eine Ziffernfolge, die nach *links* unendlich weiterlaufen darf (ohne Komma!): $\dots d_5 d_4 d_3 d_2 d_1$. Eine Folge *konvergiert* 10-adisch, wenn ihre Endziffern der Reihe nach einfrieren. Unsere Quadrier-Folge tut genau das; ihren Grenzwert taufen wir F . Seine letzten zehn Ziffern (und die seines Vorgängers $F - 1$) kennen wir schon:

$$F = \dots 8212890625, \quad F - 1 = \dots 8212890624.$$

Erkundet

Multipliziert $F \cdot (F - 1)$ schriftlich. Was kommt heraus?

$$\cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 2 & 1 & 2 & 8 & 9 & 0 & 6 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \cdot \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 2 & 1 & 2 & 8 & 9 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$
A blank sheet of graph paper with a light gray background and a uniform grid of thin gray lines. The grid consists of 20 columns and 15 rows of squares. A thicker horizontal line runs across the bottom of the page, separating the grid from a white margin area at the very bottom.

Erkundung 5: Alte Bekannte in der neuen Welt

Leben in dieser Welt auch unsere *vertrauten* Zahlen? Die positiven offensichtlich ($17 = \dots 00017$). Und die negativen?

Erkundet

- a) Stellt euch einen Kilometerzähler mit unendlich vielen Stellen vor, der auf $\dots 00000$ steht, und fahrt einen Kilometer *rückwärts*. Was zeigt er? Tragt es unten ein:

$\dots$	0	0	0	0	0
---------	---	---	---	---	---

$\downarrow$ 1 km rückwärts

$\dots$					
---------	--	--	--	--	--

Rechnet zur Kontrolle schriftlich (Spalte für Spalte, mit Übertrag):

$$\begin{array}{r}
 \dots 9999 \\
 + \quad \quad 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Welchen Wert muss $\dots 9999$ demnach haben?

- b) Findet die 10-adischen Schreibweisen von -2 , -12 und -100 . Macht bei -12 die Gegenprobe (addiert 12).
- c) **Der Fall von letzter Woche.** Wie lautet $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$ in der *2-adischen* Darstellung? Tragt die Ziffern in die Kästchen ein:

$\dots$	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
$\dots$														

Erkundung 6: Brüche ohne Komma – und zwei Verdächtige

Für $\frac{1}{3}$ schreiben wir sonst $0,333\dots$ – unendlich nach *rechts*. Geht es auch nach links, ganz ohne Komma? Gesucht: eine 10-adische Zahl x mit $3x = \dots 0001$.

Werkzeug

Stelle für Stelle. Bestimmt die Ziffern von rechts:

- Letzte Ziffer d : $3d$ soll auf 1 enden $\Rightarrow d = 7$ (denn $3 \cdot 7 = 21$), Übertrag 2.
- Vorletzte Ziffer c : $3c + 2$ soll auf 0 enden $\Rightarrow c = 6$ (denn 20), Übertrag 2.
- ... und so weiter.

Erkundet

a) Führt das Verfahren fort und füllt das Schema aus. Welche Ziffernfolge entsteht für $\frac{1}{3}$?

$$\begin{array}{r}
 x = \dots \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\
 \hline
 \text{Überträge} \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\
 \dots \quad \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1}
 \end{array}$$

b) Bestimmt genauso $\frac{1}{7}$. Kommt euch die Ziffernfolge bekannt vor? (Tippt mal $1 \div 7$ in den Taschenrechner.)

$$\begin{array}{r}
 x = \dots \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\
 \hline
 \text{Überträge} \quad \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\
 \dots \quad \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1}
 \end{array}$$

c) Versucht das Verfahren für $\frac{1}{2}$: Welche Ziffer d macht, dass $2d$ auf 1 endet? Und für $\frac{1}{5}$? Notiert, welche Nenner sich *weigern* – das sind unsere ersten Verdächtigen.

Eure Vermutung

Welche Brüche bekommen eine 10-adische Schreibweise, welche nicht? Woran könnte das liegen?

.....

.....

Bonus: Wurzelziehen in der neuen Welt

In den gewöhnlichen Zahlen hat 2 eine Wurzel ($\sqrt{2} = 1,4142\dots$), -1 dagegen keine. Wie ist es 10-adisch? Auch Wurzeln zieht man hier *Stelle für Stelle* – von rechts.

Erkundet

a) Womit kann ein Quadrat *enden*? Füllt die Tabelle aus:

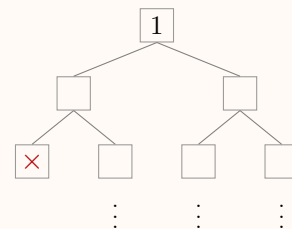
letzte Ziffer von x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
letzte Ziffer von x^2										

Welche Endziffern kommen bei Quadraten *nie* vor? Kann es eine 10-adische Zahl mit $x^2 = 2$ geben?

b) Gesucht ist $\sqrt{41}$: eine Zahl x mit $x^2 = \dots 000041$. Nach a) muss x auf 1 oder 9 enden – wir starten mit der 1. Setzt in jeder Reihe *links eine Ziffer davor*, sodass das Quadrat (Taschenrechner!) auf 41, dann 041, dann 0041, ... endet.

								1	x^2 endet auf 1
Ziffer davor ↓									
									x^2 endet auf 41
Ziffer davor ↓									
									x^2 endet auf 041
Ziffer davor ↓									
									x^2 endet auf 0041
Ziffer davor ↓									
									x^2 endet auf 00041

Tipp: Meist passen *zwei* Ziffern – und manchmal gar keine: Sackgasse (×)! Dann eine Reihe zurück und dort die andere Möglichkeit nehmen. Rechts seht ihr, wie eure Suche verzweigt.



c) *Für Schnelle:* Hat $-1 = \dots 9999$ eine Wurzel? Nach a) müsste sie auf 3 oder 7 enden. Prüft alle zweistelligen Endungen $\square 3$ und $\square 7$: Endet ein Quadrat jemals auf 99?

Eure Vermutung

Bei den gewöhnlichen Zahlen hat 41 genau *zwei* Wurzeln: $+\sqrt{41}$ und $-\sqrt{41}$. Hier scheint es mehr zu geben ... Wie viele? Merkt euch eure Beobachtung – im Finale begegnet sie euch wieder.

.....

Erkundung 7: Die verbotene Formel, rehabilitiert

Zurück zum Ausgangsfall: der geometrischen Reihe. Mit dem neuen Lineal sind die Glieder von $1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$ nicht mehr riesig, sondern *winzig* – die Reihe hat plötzlich eine echte Chance zu konvergieren.

Erkundet

- a) Schreibt die Partialsummen untereinander: $s_1 = 1$, $s_2 = 11$, $s_3 = 111$, $\dots$. Gegen welche 10-adische Zahl streben sie?
- b) Multipliziert diese Grenzzahl schriftlich mit 9. Welche berühmte Zahl aus Erkundung 5 erhaltet ihr – und welcher *Bruch* ist die Grenzzahl folglich?
- c) Setzt $x = 10$ in die verbotene Formel $\frac{1}{1-x}$ ein. Vergleicht.

Erkundung 8: Finale: Wer ist der Täter?

Sammeln wir die Beweisstücke: In dieser Welt gibt es *Nullteiler* (Erkundung 4), und durch 2 und 5 kann man *nicht teilen* (Erkundung 6). Irgendetwas an unserem Zahlssystem ist faul. Wir überführen den Täter durch systematische Ermittlungsarbeit.

Erkundet

- a) Sucht *alle* Zahlen x von 0 bis 99, deren Quadrat auf dieselben *zwei* Endziffern endet wie x selbst. *Spart euch Arbeit*: Erst überlegen, welche *letzte* Ziffer überhaupt infrage kommt (x^2 und x müssen ja schon in der letzten Ziffer übereinstimmen) – dann nur noch diese Kandidaten testen. Ihr solltet genau *vier* finden.
- b) Zwei eurer vier Lösungen kennt ihr – die anderen beiden? Eine davon ist ein alter Bekannter (vergleicht mit F). Die vierte gibt es auch „in unendlich“: Berechnet die letzten Ziffern von $F' = 1 - F$, also schriftlich

$$\dots 0000001 - \dots 8212890625 \quad (\text{Borgen nicht vergessen!}),$$

und prüft, dass euer zweistelliges Fundstück dazu passt. Testet auch: Endet F'^2 auf F' (etwa 76^2 , 376^2)?

- c) Zeigt *ohne* zu rechnen: $F \cdot F' = 0$. *Tipp*: $F' = 1 - F$ und $F^2 = F$. Unsere zwei Geisterzahlen sind also genau das Nullteiler-Pärchen aus Erkundung 4.
- d) **Der Primzahl-Test.** Wiederholt Teil a) in der Welt der Basis 7: Welche Reste $x \in \{0, 1, \dots, 6\}$ erfüllen, dass x^2 bei Division durch 7 denselben Rest lässt wie x ? (Wer mag: auch für 49.) Wie viele Lösungen findet ihr diesmal?

Eure Vermutung

Bei Basis 10: vier Lösungen, Geisterzahlen, Nullteiler. Bei Basis 7: ...? Was unterscheidet 7 von 10? Wer ist der Täter?

.....
.....