

Unendliche Reihen

Lösungsblatt

§1: Die geometrische Reihe

1. In $S - x \cdot S$ hebt sich Spalte für Spalte alles weg – übrig bleibt nur die 1: $S - x \cdot S = 1$. **2.** $S(1 - x) = 1$, also $S = \frac{1}{1-x}$. **3.** $x = \frac{1}{2}$ liefert 2; ohne die führende 1 bleibt 1 – genau das Quadratbild von letzter Woche. **4.** $x = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{2}$, $x = \frac{2}{3} \rightarrow 3$, $x = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3}$. Schon zehn Glieder stimmen auf wenige Tausendstel oder besser (der Fehler schrumpft wie x^{10}). **5.** $x = 1$: Nenner 0; die Reihe $1+1+1+\dots$ wächst über alle Grenzen. $x = 2$: Formel sagt -1 , aber die Partialsummen $1, 3, 7, 15, 31, \dots = 2^n - 1$ explodieren – klassisch kann -1 nicht stimmen. $x = -1$: Formel sagt $\frac{1}{2}$; die Partialsummen pendeln $1, 0, 1, 0, \dots$. **6.** Sinnvoll genau für $|x| < 1$; für $|x| \geq 1$ bricht die Formel zusammen. **7.** $100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \dots = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{9} = 111,\bar{1}$ m. Unendlich viele Teilstrecken können eine endliche Gesamtlänge haben – dort holt Achilles die Schildkröte ein; Zenons Schluss ist falsch. **8.** Der natürlichste Kandidat ist der Formelwert $\frac{1}{1-x}$ – er setzt die Rechenregeln fort.

§2: Die Reihe von Grandi $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

1. $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$. **2.** $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$. **3.** $1 - G = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = G$, also $2G = 1$ und $G = \frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$. **5.** Stillschweigend benutzt: das Umklammern (Assoziativgesetz). Für endliche Summen immer erlaubt – eine unendliche Summe hat aber kein letztes Glied, und Umklammern kann den Wert ändern. **6.** $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0$ – kein fester Grenzwert. Durchschnitt der ersten zehn: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ – dieselbe Antwort wie in 3. und 4. (Cesàro-Idee).

§3: Vorzeichen-Wechsel $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$

1. $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$ – zwei davonlaufende Äste, kein Grenzwert. **2.** $(1 - 2) + (3 - 4) + \dots = -1 - 1 - \dots \rightarrow -\infty$; $1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots \rightarrow +\infty$. Beides keine brauchbaren Antworten. **3.** Spaltenweise: $2T = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = G = \frac{1}{2}$, also $T = \frac{1}{4}$. **4.** $\frac{1}{4}$ passt zu keiner der Klammerungen aus 2. – aber exakt zur geometrischen Reihe (Eulers Ableitungsweg).

§4: Die Hauptattraktion $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

1. Ungerade Spalten: 0. Gerade Spalten: $4, 8, 12, \dots$. Also $S - T = 4 + 8 + 12 + \dots = 4(1 + 2 + 3 + \dots) = 4S$. **2.** $S - \frac{1}{4} = 4S \Rightarrow -3S = \frac{1}{4} \Rightarrow S = -\frac{1}{12}$. **3.** $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \stackrel{!}{=} -\frac{1}{12}$.

§5: Was haben wir eigentlich gemacht?

1. $s_5 = 15$, $s_{10} = 55$, $s_{100} = 5050$ – die Dreieckszahlen, $s_n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \infty$. **2.** Benutzt: Verschieben, Term-für-Term-Subtraktion, Gleichungslösen. Für endliche Summen alles harmlos. Bei divergenten Reihen sind Verschieben und termweises Rechnen die Sünder – und $-3S = \frac{1}{4}$ darf man nur nach S auflösen, wenn S überhaupt eine Zahl ist. **3.** Grandi selbst: $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$, aber $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$.

§6: Die Funktionalgleichung bei $s = -1$

1. $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $\pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2}$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\Gamma(2) = 1! = 1$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. **2.** $\zeta(-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$.

§7: Weiterprobieren

1. Verschiebungstrick: $2U = 1 - 2 + 2 - 2 + 2 - \dots = 1 - 2(1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - 2G = 0$, also $U = 0$. **2.** Formel: $\frac{1}{1-2} = -1$. Trick: $2S = 2 + 4 + 8 + \dots = S - 1$, also $S = -1$. Die Partialsummen $2^n - 1$ explodieren – klassisch divergiert die Reihe; -1 ist nur der einzige regelverträgliche Wert. (Und es gibt eine Zahlwelt,

in der er wörtlich stimmt: 2-adisch ist $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \dots 1111_2 = -1$ – siehe „Die Spur der Fünf“. **3.** Die Klammerpaare ergeben $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{2} \ln 2$. Bloßes Umsortieren hat den Wert halbiert! Bei solchen Reihen ist Umsortieren verboten – nach Riemann kann man damit sogar jeden beliebigen Wert erzwingen. **4.** Verschiebungstrick: $2V = 1 - 3 + 5 - 7 + \dots = U = 0$ (Aufgabe 1!), also $V = 0$. Naive Klammerungen liefern $\pm\infty$; der regelverträgliche Wert ist 0. **5.** Euler: Zieht man von $\zeta(s)$ alle geraden Glieder doppelt ab, bleibt $1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \dots = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$. Für $s = -1$: links $1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$, Faktor $1 - 2^2 = -3$, also $\zeta(-1) = \frac{1/4}{-3} = -\frac{1}{12}$ – derselbe Wert wie über die Funktionalgleichung.