

# Unendliche Reihen

Wie viel ist  $1 + 2 + 3 + \dots$ ? Eulers überraschende Antwort

Material für den Mathezirkel der Klasse 8

Mathezirkel — Vorbereitung auf Mathematikwettbewerbe

## Worum geht es heute?

Letzte Woche habt ihr die *geometrische Reihe* kennengelernt:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Wir gehen heute einen Schritt weiter – und einen Schritt zu weit. Wir rechnen mit unendlichen Summen so, als wären es gewöhnliche Zahlen, und stoßen dabei auf ein Ergebnis, das Leonhard Euler im 18. Jahrhundert für die Summe *aller* natürlichen Zahlen herleitete:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Klingt absurd? Ist es auch – jedenfalls auf den ersten Blick. Eure Aufgabe ist es heute, Schritt für Schritt selbst herauszufinden, wie Euler auf diese Antwort kam, und am Ende kritisch zu beurteilen, was wir dabei eigentlich getan haben.

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                       |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Die geometrische Reihe</b>                                                       | <b>1</b>  |
| <b>2 Die Reihe von Grandi: <math>1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots</math></b>             | <b>4</b>  |
| <b>3 Die Reihe der Vorzeichen-Wechsel: <math>1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots</math></b> | <b>6</b>  |
| <b>4 Die Hauptattraktion: <math>1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}</math></b>      | <b>7</b>  |
| <b>5 Was haben wir eigentlich gemacht?</b>                                            | <b>8</b>  |
| <b>6 Wie man der <math>-\frac{1}{12}</math> streng Sinn abgewinnt</b>                 | <b>9</b>  |
| <b>7 Weiterprobieren</b>                                                              | <b>12</b> |

## 1 Die geometrische Reihe

Letzte Woche habt ihr die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

betrachtet und mit einem hübschen Bild gesehen, dass sie den Wert 1 ergibt: Ein Quadrat der Fläche 1 wird in immer kleinere Hälften zerteilt, und die Teile zusammen füllen es lückenlos aus.

Heute leiten wir eine Formel her, die diesen Wert – und unendlich viele weitere – in einem Rutsch liefert.

## Die Herleitung

Wir betrachten für eine reelle Zahl  $x$  die unendliche Summe

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

und tun zunächst so, als sei  $S$  einfach eine Zahl. Dann können wir sie auch mit  $x$  multiplizieren.

### Aufgaben

1. Schreibt  $S$  und  $x \cdot S$  *untereinander* so auf, dass gleiche Potenzen von  $x$  in derselben Spalte stehen:

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 1 & + x & + x^2 & + x^3 & + x^4 & + \dots \\ x \cdot S & = & & x & + x^2 & + x^3 & + x^4 & + \dots \end{array}$$

Bildet die Differenz  $S - x \cdot S$  *Spalte für Spalte*. Was bleibt übrig?

2. Klammert auf der linken Seite  $S$  aus und löst die entstandene Gleichung nach  $S$  auf. Welche Formel erhaltet ihr?

### Beobachtung

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

Das ist die **geometrische Reihe**.

## Stimmt das wirklich? Prüfen an Beispielen

Die Herleitung sieht überzeugend aus – aber wir haben einen entscheidenden Schritt versteckt: Wir haben so getan, als sei  $S$  eine ganz gewöhnliche Zahl, mit der man wie üblich rechnen kann. Ob das für jedes  $x$  erlaubt ist, müssen wir prüfen.

### Aufgaben

3. **Kontrolle mit letzter Woche.** Setzt  $x = \frac{1}{2}$  in die Formel ein. Welchen Wert für die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

liefert sie? Und welcher Wert ergibt sich dann für die Reihe *ohne* die führende 1, also  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ? Passt das zu eurem Bild von letzter Woche?

4. Setzt  $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$  in die Formel ein und vergleicht jeweils mit der Summe der ersten zehn Glieder (Taschenrechner). Wie genau stimmt das überein?

5. **Drei verdächtige Fälle.** Was passiert, wenn ihr die folgenden Werte in die Formel einsetzt?

- $x = 1$ : Was steht im Nenner der Formel? Und was sagt die Reihe  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ ?
- $x = 2$ : Welchen Wert liefert die Formel? Berechnet zum Vergleich die Partialsummen

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + 2 = 3, s_3 = 1 + 2 + 4 = 7, s_4 = 15, s_5 = 31, \dots$$

Kann der Formelwert „richtig“ sein?

- $x = -1$ : Welchen Wert liefert die Formel? Schreibt die Reihe hin. Berechnet die Partialsummen  $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ . Was beobachtet ihr?

6. *Vermutung.* Für welche Werte von  $x$  scheint die Formel sinnvoll zu sein, für welche bricht sie zusammen? Stellt eine Vermutung auf.

### Beobachtung

Die Formel

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

ist nur wahr für  $|x| < 1$ . Genau dann werden die Glieder  $x^n$  für große  $n$  beliebig klein, und die Partialsummen  $s_n = 1 + x + \dots + x^{n-1}$  nähern sich dem Wert  $\frac{1}{1-x}$  an – man sagt, die Reihe **konvergiert**.

Für  $|x| \geq 1$  **divergiert** die Reihe: Die Partialsummen wachsen über alle Grenzen ( $x \geq 1$ ) oder schwanken, ohne sich zu beruhigen ( $x \leq -1$ ). Die Formel  $\frac{1}{1-x}$  ist dann streng genommen *sinnlos* – auch wenn sie auf dem Papier eine Zahl liefert.

## Anwendung – und eine Provokation

### Aufgaben

7. *Achilles und die Schildkröte* (nach Zenon, ca. 450 v. Chr.). Achilles läuft 10-mal so schnell wie eine Schildkröte, gibt ihr aber 100 m Vorsprung. Solange Achilles bis zur aktuellen Position der Schildkröte gelaufen ist, hat sie sich schon ein Stück weiterbewegt – und so geht es immer weiter.

Stellt die Gesamtstrecke, die Achilles bis zum Einholen läuft, als geometrische Reihe auf und berechnet sie. Was sagt Zenon dazu („Achilles holt die Schildkröte niemals ein, denn er muss unendlich viele Strecken zurücklegen“) – und was sagt die Mathematik?

8. **Die große Provokation.** Im vorigen Abschnitt habt ihr gesehen: Für  $|x| \geq 1$  ist die Formel  $\frac{1}{1-x}$  eigentlich sinnlos. Trotzdem *liefert* sie für diese Werte konkrete Zahlen:

$$\frac{1}{1-2} = -1, \quad \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1-(-2)} = \frac{1}{3}.$$

Wenn wir der divergenten Reihe  $1 + x + x^2 + \dots$  für diese Werte trotzdem irgendeine Zahl zuordnen wollten – was wäre der „natürlichste“ Kandidat? Diskutiert in Zweiergruppen.

Aufgabe 7 ist die Schlüsselfrage für den Rest dieses Skripts. Wir stellen uns ab jetzt auf die Position: Wenn eine divergente Reihe überhaupt einen Wert hat, dann sollte dieser Wert mit unseren Rechenregeln verträglich sein – und insbesondere mit der Formel der geometrischen Reihe. Das war Eulers Standpunkt im 18. Jahrhundert, und er führte ihn zu wunderschönen, oft überraschenden Identitäten.

## 2 Die Reihe von Grandi: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Wir betrachten eine besonders einfach aussehende Reihe:

$$G = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Sie ist nach dem italienischen Mönch und Mathematiker *Guido Grandi* (1671–1742) benannt. Auf den ersten Blick scheint klar, was rauskommen sollte. Auf den zweiten Blick ist überhaupt nichts klar.

### Aufgaben

1. **Klammere zuerst paarweise:** Schreibe

$$G = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

und berechne. Was kommt heraus?

2. **Klammere die erste 1 weg:** Schreibe

$$G = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$$

und berechne. Was kommt heraus?

3. **Der Selbstbezug-Trick.** Wir berechnen jetzt  $1 - G$ . Schreibt es aus:

$$1 - G = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots).$$

Was steht auf der rechten Seite, wenn ihr das Minuszeichen hineinzieht? Vergleicht sorgfältig mit  $G$  selbst. Findet ihr eine Gleichung für  $G$ ? Löst sie.

4. Setze in die Formel der geometrischen Reihe  $\frac{1}{1-x}$  den Wert  $x = -1$  ein. Welchen Wert für  $G$  liefert sie?

### Beobachtung

Drei „Beweise“ drei verschiedene Antworten:

$$G = 0, \quad G = 1, \quad G = \frac{1}{2}.$$

Etwas Grundlegendes muss schiefgehen, wenn die gleiche Reihe auf drei verschiedene „richtige“ Werte führt.

### Aufgaben

5. Welche Rechenregel haben wir in den Aufgaben 1 und 2 stillschweigend benutzt? Gilt diese Regel für *endliche* Summen immer? Was unterscheidet eine unendliche Summe von einer endlichen?

6. Berechne die *Teilsummen* (*Partialsummen*) der Grandi-Reihe:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 - 1, \quad s_3 = 1 - 1 + 1, \quad s_4 = 1 - 1 + 1 - 1, \quad \dots$$

Schreibt die ersten zehn Werte  $s_1, s_2, \dots, s_{10}$  auf. Strebt diese Folge gegen einen festen Wert? Was ist der *Durchschnitt* der ersten zehn Teilsummen? Ist das vielleicht eine bessere „Antwort“?

Wir merken uns für später: Wenn wir Grandi überhaupt einen Wert zuschreiben *wollen*, ist

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

der Wert, den unsere Rechenregeln und die geometrische Reihe übereinstimmend nahelegen. Das ist auch der Wert, den Euler verwendet hat. *Es ist nicht klar, dass das erlaubt ist* – aber wir machen erst einmal weiter und sehen, wohin uns das führt.

### 3 Die Reihe der Vorzeichen-Wechsel: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$

Jetzt wagen wir uns an die nächste Reihe:

$$T = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots$$

Die Glieder werden vom Betrag her immer größer – die Reihe „schwankt“ also gewaltig. Trotzdem versuchen wir, ihr einen Wert zuzuschreiben.

#### Aufgaben

1. Schreibt die ersten zehn Partialsummen  $s_n = 1 - 2 + 3 - \dots \pm n$  auf. Strebt diese Folge gegen irgendetwas?

2. **Probiere verschiedene Klammerungen.** Was kommt für

$$(1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots \quad \text{und} \quad 1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + (-6 + 7) + \dots$$

jeweils heraus? Sind das sinnvolle Antworten?

3. **Der Verschiebungstrick.** Wir wollen  $2T$  berechnen, indem wir  $T$  zweimal hinschreiben – aber die zweite Kopie um *eine Stelle nach rechts verschoben*. Füllt aus:

$$\begin{array}{rcccccccc} T = & 1 & -2 & +3 & -4 & +5 & -6 & +7 & - \dots \\ T = & & +1 & -2 & +3 & -4 & +5 & -6 & + \dots \\ \hline 2T = & & & & & & & & \end{array}$$

Was ergibt die Summe *Spalte für Spalte*? Erkennt ihr die entstehende Reihe wieder? Was folgt daraus für  $T$ ?

4. Vergleicht euer Ergebnis mit dem, was ihr in Aufgabe 2 vermutet hattet. Passt es zu einer der vorherigen Klammerungen?

#### Beobachtung

Unser Verschiebungstrick liefert

$$2T = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = G = \frac{1}{2},$$

also

$$T = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}.$$

*Historische Anmerkung.* Euler kam ursprünglich auf diesen Wert mit einer anderen Methode: Er hat die Formel der geometrischen Reihe  $\frac{1}{1-x}$  *differenziert*, um  $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$  zu erhalten, und dann  $x = -1$  eingesetzt. Das gibt

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{(1-(-1))^2} = \frac{1}{4}.$$

Unser Verschiebungstrick liefert dasselbe Ergebnis – ohne Ableitung.

## 4 Die Hauptattraktion: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$

Jetzt kommt der eigentliche „Beweis“ Eulers. Wir bezeichnen die zwei Reihen, die wir brauchen werden:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots$$

$$T = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots = \frac{1}{4} \quad (\text{aus §3})$$

### Aufgaben

1. Schreibt die beiden Reihen *untereinander* und berechnet  $S - T$  *Spalte für Spalte*:

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & + \dots \\ T = & 1 & -2 & +3 & -4 & +5 & -6 & +7 & - \dots \\ \hline S - T = & & & & & & & & \end{array}$$

Was passiert in den ungeraden Spalten, was in den geraden? Schreibt die entstehende Reihe als möglichst einfachen Ausdruck in  $S$  hin.

2. Setzt das Ergebnis aus Aufgabe 1 mit  $T = \frac{1}{4}$  gleich und löst nach  $S$  auf.  
3. Schreibt das vollständige Endergebnis sauber auf:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots = ?$$

### Beobachtung

Wir erhalten

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots \stackrel{!}{=} -\frac{1}{12}.$$

Eine *positive, immer wachsende* Reihe hätte also einen *negativen, gebrochenen* Wert? Etwas kann hier unmöglich stimmen – oder doch?

## 5 Was haben wir eigentlich gemacht?

Zeit für eine kritische Rückschau. Wir haben ein Ergebnis erhalten, das jeder gesunde Menschenverstand zurückweisen würde. Wo liegt das Problem? Und liegt es überhaupt irgendwo?

### Aufgaben

1. **Partialsummen.** Schreibt die ersten Partialsummen der Reihe  $1 + 2 + 3 + \dots$  auf:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 6, \quad s_4 = 10, \quad s_5 = ? \quad s_{10} = ? \quad s_{100} = ?$$

Erkennt ihr die Folge wieder? Welche bekannte Formel liefert  $s_n$ ? Strebt  $s_n$  für große  $n$  gegen einen festen Wert – oder gegen Unendlich?

2. **Wo haben wir „geschummelt“?** Geht unsere Rechnung in §4 nochmal Schritt für Schritt durch. Welche der folgenden Manipulationen haben wir benutzt, und welche sind bei *endlichen* Summen unproblematisch?

- Umklammern:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
- Umsortieren:  $a + b = b + a$ .
- Verschieben einer unendlichen Folge um eine Stelle.
- Term-für-Term-Subtraktion zweier unendlicher Reihen.
- Auflösen einer Gleichung wie  $-3S = \frac{1}{4}$  nach  $S$ .

Welche dieser Schritte könnten bei *unendlichen* Reihen ein Problem darstellen, und warum?

3. Findet eine andere „Reihe“, bei der ihr durch Umklammern zwei verschiedene Werte herausbekommt. *Tipp:* Manipuliert die Grandi-Reihe geschickt.

### Vorsicht

Eine unendliche Reihe *konvergiert* (hat im klassischen Sinn einen Wert), wenn ihre Partialsummen  $s_n$  sich beliebig nah an eine feste Zahl annähern, sobald man  $n$  groß genug wählt. Beispiel:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$  konvergiert gegen 2.

Die Reihen  $G, T, S$  in diesem Skript **konvergieren alle nicht**. Ihre Partialsummen schwanken oder wachsen über alle Grenzen. Daher sind Rechnungen wie „ $S - T = 4S$ “ *streng genommen unerlaubt* – wir haben mit Objekten gerechnet, die keine Zahlen sind, so als wären es welche.

Im nächsten Abschnitt schauen wir uns an, wie die moderne Mathematik dem Wert  $-\frac{1}{12}$  trotzdem – mit anderen, saubereren Werkzeugen – einen festen Sinn gibt.

## 6 Wie man der $-\frac{1}{12}$ streng Sinn abgewinnt

Wir haben gesehen: Eulers Rechnung ist im klassischen Sinn keine gültige Herleitung – sie verletzt die Konvergenzbedingungen, die wir heute fordern. Trotzdem ist  $-\frac{1}{12}$  *kein Zufall*. In einem präzisen mathematischen Rahmen ist es der einzig sinnvolle Wert für diese Reihe.

Die strenge Theorie dahinter braucht etwa zwei Semester Universitätsmathematik; wir können hier nur einen Ausblick geben. Aber die zentrale Idee ist überraschend einfach – und ihr habt sie bereits in §1 dieses Skripts gesehen.

### Eine vertraute Idee: Formeln „wissen mehr als Reihen

Erinnert euch an §1: Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

gilt nur für  $|x| < 1$ . Die Reihe links *konvergiert* sonst nicht. Die Formel rechts,  $\frac{1}{1-x}$ , ist aber für *jedes*  $x \neq 1$  wohldefiniert.

Schon damals habt ihr in der „großen Provokation“ gesehen: Setzt man trotzdem  $x = 2, -1, -2$  in die Formel ein, erhält man Zahlen  $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ , die die divergente Reihe selbst gar nicht „wissen“. Die *Formel* weiß mehr als die Reihe.

#### Idee

**Analytische Fortsetzung.** Eine Funktion, die auf einem Bereich (z. B.  $|x| < 1$ ) durch eine konvergente Reihe gegeben ist, lässt sich oft *eindeutig* auf einen viel größeren Bereich erweitern – nämlich überall dorthin, wo die „Formel“ Sinn ergibt. Die erweiterte Funktion stimmt im ursprünglichen Bereich mit der Reihe überein und liefert für alle anderen Punkte einen eindeutigen, natürlichen Wert.

Dieser Begriff ist der Kern dessen, was kommt.

### Die Riemannsche Zeta-Funktion

Jetzt das Gleiche eine Etage höher. Für reelle Zahlen  $s > 1$  definieren wir die *Riemannsche Zeta-Funktion*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für  $s > 1$ . Einige Werte sind in der Mathematik berühmt:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ (Basel-Problem)}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \dots$$

Bei  $s = 1$  erhält man die divergente harmonische Reihe; für  $s \leq 1$  konvergiert die definierende Reihe niemals. Insbesondere für  $s = -1$ :

$$\zeta(-1) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots$$

Genau *unsere* Reihe! Sie divergiert wild – aber:

Die Funktion  $\zeta(s)$ , die zunächst nur für  $s > 1$  durch die Reihe definiert ist, lässt sich *eindeutig* auf alle reellen (und sogar komplexen) Zahlen  $s \neq 1$  **analytisch fortsetzen**. Das hat *Bernhard Riemann* 1859 in einer berühmten 8-seitigen Arbeit ausgeführt.

An jeder Stelle  $s \neq 1$  hat  $\zeta(s)$  damit einen festen, durch die Theorie eindeutig bestimmten Wert – auch dort, wo die definierende Reihe divergiert.

## Riemanns Funktionalgleichung

Wie berechnet man  $\zeta(-1)$  konkret? Riemann fand eine wunderschöne Identität – die **Funktionalgleichung** –, die die Werte von  $\zeta$  an  $s$  und  $1-s$  miteinander verknüpft:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Die Funktion  $\Gamma$  ist die *Gammafunktion* – eine glatte Verallgemeinerung der Fakultät auf alle reellen Zahlen. Es gilt  $\Gamma(n+1) = n!$  für natürliche  $n$ , also  $\Gamma(2) = 1! = 1$ ,  $\Gamma(3) = 2! = 2$ ,  $\Gamma(4) = 3! = 6$ , und so weiter.

Setzen wir  $s = -1$  ein, verbindet die Funktionalgleichung den *gesuchten* Wert  $\zeta(-1)$  mit dem *bekannten* Wert  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Aufgaben

1. Setzt  $s = -1$  in die Funktionalgleichung ein und berechnet die einzelnen Faktoren auf der rechten Seite:

- $2^s = 2^{-1} = ?$
- $\pi^{s-1} = \pi^{-2} = ?$
- $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ?$
- $\Gamma(1-s) = \Gamma(2) = ?$
- $\zeta(1-s) = \zeta(2) = ?$  (*Basel-Problem – s. eigenes Skript!*)

2. Multipliziert die fünf Faktoren miteinander. Welcher Wert ergibt sich für  $\zeta(-1)$ ?

### Beobachtung

Das Produkt ist

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Das ist ein **streng beweisbarer Satz** – kein Schummel-Trick. Die Funktion  $\zeta$  ist eindeutig definiert, und an der Stelle  $s = -1$  hat sie den Wert  $-\frac{1}{12}$ .

*Genau dies* ist der Sinn, in dem man der „Summe“  $1 + 2 + 3 + \dots$  den Wert  $-\frac{1}{12}$  zuordnet: nicht als Wert einer divergenten Reihe (die hat keinen!), sondern als Wert der analytischen Fortsetzung  $\zeta(-1)$ .

## Andere Wege zur selben Antwort

Die analytische Fortsetzung von  $\zeta$  ist nicht der einzige strenge Weg, divergenten Reihen Werte zuzuordnen. Es gibt eine ganze Familie sogenannter *Summationsmethoden*:

- **Cesàro-Summation.** Bilde den Durchschnitt der Partialsummen  $\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$  und schaue, ob *dieser* konvergiert. Für die Grandi-Reihe  $1 - 1 + 1 - \dots$  gibt das tatsächlich  $\frac{1}{2}$  (Aufgabe in §2 dieses Skripts!). Für  $1 + 2 + 3 + \dots$  scheitert die Methode – der Durchschnitt divergiert ebenfalls.
- **Abel-Summation.** Betrachte  $\sum a_n x^n$  und lasse  $x \rightarrow 1^-$ . Funktioniert für Grandi (liefert wieder  $\frac{1}{2}$ ), aber nicht für  $1 + 2 + 3 + \dots$ .
- **Ramanujan-Summation.** Der indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887–1920) entwickelte um 1913 eine Methode auf Basis der Euler-Maclaurin-Formel. Sie ordnet vielen divergenten Reihen einen festen Wert zu – und für  $1 + 2 + 3 + \dots$  ist dieser Wert genau  $-\frac{1}{12}$ .

- **Zeta-Regularisierung.** Definiere  $\sum n := \zeta(-1)$  – genau wie oben. Diese Methode ist heute Standard in der theoretischen Physik.

**Die bemerkenswerte Beobachtung:** Alle Methoden, die für  $1 + 2 + 3 + \dots$  überhaupt einen Wert liefern, geben *denselben* Wert. Das ist kein Zufall, sondern ein Hinweis darauf, dass  $-\frac{1}{12}$  in einem tieferen Sinn der „natürliche“ Wert dieser Reihe ist.

## Wozu das alles? Anwendung in der Physik

In der *Quantenfeldtheorie* – der Theorie von Elementarteilchen und Feldern – treten regelmäßig formal divergente Reihen wie  $\sum n$  auf. Das berühmteste Beispiel: die *Vakuumenergie* zwischen zwei parallelen, eng beieinanderstehenden Metallplatten.

Klassisch wäre diese Energie unendlich – ein Ärgernis, das frühe Physiker irritierte. *Hendrik Casimir* zeigte 1948, dass eine sinnvolle Theorie entsteht, wenn man die Divergenz durch Zeta-Regularisierung „bündigt:  $\sum n$  wird durch  $-\frac{1}{12}$  ersetzt. Das liefert eine endliche, *anziehende* Kraft zwischen den Platten.

Diese Kraft – der *Casimir-Effekt* – wurde 1958 von Marcus Sparnaay erstmals nachgewiesen und ist heute experimentell bestens bestätigt. Sie stimmt quantitativ mit der Vorhersage überein, die  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  benutzt.

In der *Stringtheorie* folgt aus derselben Identität, dass die Raumzeit (in der bosonischen Variante) genau 26 Dimensionen haben muss. Die Natur scheint also „zu wissen“, dass  $-\frac{1}{12}$  der richtige Wert ist.

## Die Moral

### Idee

Eulers Rechnung war keine Schummelei mit zufälligem Glück – sie war eine *Vorahnung*. Mit den Werkzeugen seiner Zeit konnte Euler die Strenge nicht herstellen, aber er hatte das richtige Bauchgefühl. Anderthalb Jahrhunderte später, mit Riemann, kam die strenge Begründung; im 20. Jahrhundert die Anwendungen in der Physik.

Das ist eine wiederkehrende Geschichte in der Mathematik: Geniale Mathematiker entdecken *Wahrheiten* oft, bevor die strenge Theorie verfügbar ist, sie zu rechtfertigen. Die Strenge kommt hinterher – nicht, um die Wahrheit zu *erschaffen*, sondern um sie auf solide Grundlagen zu stellen.

Mathematik ist nicht „wahr oder falsch“, sondern „präzise oder unpräzise“. Eulers Rechnung war unpräzise – aber sie hat die Richtung gewiesen, in der die Mathematik des 19. und 20. Jahrhunderts dann die präzise Theorie entwickelt hat.

## 7 Weiterprobieren

Wer Lust auf mehr hat: Hier sind Aufgaben in der gleichen Manier. Manche sind harmlos, manche enthalten eine Falle.

### Aufgaben

- 1. Ungerade mit Vorzeichen.** Bestimme mit dem Verschiebungstrick einen „Euler-Wert“ für

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots$$

*Tipp:* Verschiebe dieses Mal so, dass sich beim Addieren die geraden Spalten in  $G = 1 - 1 + 1 - \dots$  verwandeln.

- 2. Eulers Lieblingsfalle.** Wir betrachten die Reihe der Zweierpotenzen

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

Setze  $x = 2$  in die geometrische Reihe ein. Was sagt die Formel  $\frac{1}{1-x}$ ? Bestätige denselben Wert mit dem Trick „ $2S = S - 1$ “. Vergleiche mit den Partialsummen  $1, 3, 7, 15, 31, \dots$  und diskutiere: Wie kann das sein?

- 3. Umsortieren bei konvergenten Reihen.** Es ist bekannt, dass

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2 \approx 0,693.$$

(Diese Reihe konvergiert wirklich!) Berechne nun die Teilsumme, in der zuerst *ein* positives und dann *zwei* negative Glieder kommen:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \dots$$

Fasse die Paare in den Klammern zusammen. Welche Reihe entsteht? Welchen Wert hat sie? Vergleiche mit  $\ln 2$ .

- 4. Quadratzahlen.** Bestimme mit ähnlichen Tricks einen „Wert“ für

$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \dots$$

Vergleicht euer Ergebnis untereinander – ihr werdet möglicherweise unterschiedliche Antworten bekommen, je nachdem, welchen Trick ihr verwendet. Welcher überzeugt euch am meisten?

- 5. Eulers Originalweg.** Recherchiert (Wikipedia, Bibliothek), wie Euler ursprünglich auf  $-\frac{1}{12}$  kam. Er verwendete die *Zeta-Funktion* und ein Argument, das mit der Substitution  $x \mapsto 2x$  in der Reihe  $\sum \frac{1}{n^s}$  arbeitet. Skizziert seinen Weg in eigenen Worten und vergleicht ihn mit unserem.

*„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen,  
so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.“*

— Johann Wolfgang von Goethe