

Lösungen & Hinweise

zum Skript „Beweistechniken“ – Mathezirkel Klasse 8

Lehrermaterial – nicht zur Weitergabe an Schüler:innen

Hinweis zur Nutzung. Dieses Dokument hat zwei Teile:

Teil I – Hinweise.

Für jede Aufgabe ein kurzer **Hinweis**, mit dem Schüler:innen weiterkommen, wenn sie festsitzen. Diese können ausgeschnitten oder einzeln vorgelesen werden, ohne dass die ganze Lösung verraten wird.

Teil II – Lösungen.

Für jede Aufgabe eine **vollständig ausgearbeitete Lösung**, geeignet als Tafelbeweis oder zur Selbstkontrolle.

Die Aufgabennummerierung folgt exakt der Nummerierung im Schülerskript (z. B. Aufgabe 3.5 = §3, Aufgabe 5).

Inhaltsverzeichnis

Teil I – Hinweise	3
1 Direkter Beweis – Hinweise	3
2 Fallunterscheidung – Hinweise	4
3 Widerspruchsbeweis – Hinweise	4
4 Kontraposition – Hinweise	5
5 Vollständige Induktion – Hinweise	5
6 Gegenbeispiel – Hinweise	6
7 Schubfachprinzip – Hinweise	7
8 Invariantenprinzip – Hinweise	7
Teil II – Lösungen	9
9 Direkter Beweis – Lösungen	9
10 Fallunterscheidung – Lösungen	11

11 Widerspruchsbeveis – Lösungen	12
12 Kontraposition – Lösungen	14
13 Vollständige Induktion – Lösungen	15
14 Gegenbeispiel – Lösungen	16
15 Schubfachprinzip – Lösungen	17
16 Invariantenprinzip – Lösungen	19

Teil I – Hinweise

Diese Hinweise sind so dosiert, dass sie die zentrale Idee anreißen, ohne die Lösung vorwegzunehmen. Aufwärmaufgaben (★) sind in der Regel direkt nach dem Beispiel lösbar und brauchen keinen separaten Hinweis – sie sind hier dennoch aufgeführt, mit Hinweis auf den Lösungsteil.

1 Direkter Beweis – Hinweise

Aufgabe 1.1. (★) Zeige: Das Quadrat einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar.

(Aufwärm Aufgabe – kein gesonderter Hinweis nötig; siehe Lösung.)

Aufgabe 1.2. (★) Zeige: Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ durch 4 teilbar.

(Aufwärm Aufgabe – kein gesonderter Hinweis nötig; siehe Lösung.)

Aufgabe 1.3. (★★) Zeige: Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

Hinweis. Faktorisiere $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. Was lässt sich über drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sagen?

Aufgabe 1.4. (★★) Sind a und b zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, so ist $a^2 + b^2 + (ab)^2$ eine Quadratzahl.

Hinweis. Setze $b = a + 1$. Versuche, das Ergebnis als $(a^2 + a + 1)^2$ zu schreiben.

Aufgabe 1.5. (★★) (MO 4, 2. Stufe) Bilde zu einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge. Zeige, dass die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 99 teilbar ist.

Hinweis. Schreibe die Zahl in Stellenwertdarstellung: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Aufgabe 1.6. (★★) Jede sechsstellige Zahl der Form \overline{abcabc} ist durch 7, 11 und 13 teilbar.

Hinweis. $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$. Welche Primfaktoren hat 1001?

Aufgabe 1.7. (★★) (MO 8, 1. Stufe) Ist $100a + b$ durch 7 teilbar, so ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar.

Hinweis. $100a = 98a + 2a$, und $98 = 7 \cdot 14$ ist durch 7 teilbar.

Aufgabe 1.8. (★★★) Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ sogar durch 8 teilbar.

Hinweis. Faktorisiere $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Für ungerades n sind $n-1$ und $n+1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen.

Aufgabe 1.9. (★★★) (Käng.-Stil) Die Zahl $\underbrace{11\dots1}_{2024 \text{ Einsen}}$ ist kein Quadrat einer ganzen Zahl.

Hinweis. Welchen Rest lässt diese Zahl bei Division durch 4? Welche Reste sind für Quadratzahlen überhaupt möglich?

Aufgabe 1.10. (★★★) (MO 18, 3. Stufe) Ist $p > 3$ eine Primzahl, so ist $(p - 1)(p + 1)$ durch 24 teilbar.

Hinweis. Zerlege $24 = 8 \cdot 3$ mit $\text{ggT}(8, 3) = 1$. Zeige beide Teilbarkeiten getrennt; nutze für „durch 8“ die Aufgabe 1.8.

2 Fallunterscheidung – Hinweise

Aufgabe 2.1. (★) Für jede ganze Zahl n ist $n(n + 1)(n + 2)$ durch 3 teilbar.

Hinweis. Unterscheide nach dem Rest von n bei Division durch 3.

Aufgabe 2.2. (★) Eine Quadratzahl lässt bei Division durch 4 stets den Rest 0 oder 1. (Aufwärmübung – kein gesonderter Hinweis nötig; siehe Lösung.)

Aufgabe 2.3. (★★) Genau eine der Zahlen $a, b, a + b$ ist gerade – oder alle drei.

Hinweis. Vier Fälle nach Parität von a und b .

Aufgabe 2.4. (★★) Die Differenz zweier Quadratzahlen ist niemals gleich 2.

Hinweis. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Was haben $a - b$ und $a + b$ für eine Parität?

Aufgabe 2.5. (★★★) (MO-Stil) Bestimme alle Primzahlen p , für die auch $p + 2$ und $p + 4$ Primzahlen sind.

Hinweis. Betrachte $p \bmod 3$. Eine der drei Zahlen $p, p + 2, p + 4$ ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 2.6. (★★★) Für keine ganze Zahl n ist $n^2 + 1$ durch 7 teilbar.

Hinweis. Welche Reste kann n^2 bei Division durch 7 haben? Stelle eine Restklassentabelle auf.

3 Widerspruchsbeweis – Hinweise

Aufgabe 3.1. (★) Es gibt keine größte ungerade Zahl.

Hinweis. Annahme: m ist die größte ungerade Zahl. Was kannst du aus m konstruieren, das größer und ungerade ist?

Aufgabe 3.2. (★) Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot b$ ungerade, so sind a und b beide ungerade.

Hinweis. Annahme: o. B. d. A. ist a gerade. Was folgt für $a \cdot b$?

Aufgabe 3.3. (★★) Es gibt keine ganze Zahl n mit $n^2 = 2$.

Hinweis. Größenvergleich: Was ist n^2 für $|n| \leq 1$ bzw. $|n| \geq 2$?

Aufgabe 3.4. (★★) Aus $a + b \geq 100$ folgt $a \geq 50$ oder $b \geq 50$.

Hinweis. Annahme: beide kleiner als 50. Was folgt für die Summe?

Aufgabe 3.5. (★★★) $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Hinweis. Annahme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p, q . Quadrieren liefert $p^2 = 2q^2$. Was folgt für die Parität von p ? Und dann für q ?

Aufgabe 3.6. (★★★) Es gibt keine ganzen Zahlen a, b mit $a^2 - 4b = 2$.

Hinweis. Reduziere die Gleichung modulo 4. Welche Reste lässt a^2 ? (Vergleiche Aufgabe 2.2.)

4 Kontraposition – Hinweise

Aufgabe 4.1. (★) Ist $a \cdot b$ ungerade, so sind a und b beide ungerade.

Hinweis. Kontraposition: „Ist a oder b gerade, dann ist ab gerade.“

Aufgabe 4.2. (★) Ist $n^2 + 1$ ungerade, so ist n gerade.

Hinweis. Kontraposition: „Ist n ungerade, dann ist $n^2 + 1$ gerade.“ Nutze das Beispiel aus dem Kapitel.

Aufgabe 4.3. (★★) Ist n^3 gerade, so ist n gerade.

Hinweis. Kontraposition: Ist n ungerade ($n = 2k + 1$), so ist auch n^3 ungerade.

Aufgabe 4.4. (★★) Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a + b \neq 0$, so ist $a \neq -b$.

Hinweis. Kontraposition: $a = -b \Rightarrow a + b = 0$.

Aufgabe 4.5. (★★★) Ist n^2 durch 3 teilbar, so ist auch n durch 3 teilbar.

Hinweis. Kontraposition mit Fallunterscheidung: n lässt Rest 1 oder 2 bei Division durch 3. Quadriere beide Fälle.

5 Vollständige Induktion – Hinweise

Aufgabe 5.1. (★) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ für alle $n \geq 1$.

(Aufwärmübung – kein gesonderter Hinweis nötig; siehe Lösung.)

Aufgabe 5.2. (★) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \geq 1$.

(Aufwärmübung – kein gesonderter Hinweis nötig; siehe Lösung.)

Aufgabe 5.3. (★★) $2^n > n$ für alle $n \geq 1$.

Hinweis. Im IS: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$. Mit der IV folgt $2^{n+1} > 2n$. Warum ist $2n \geq n + 1$?

Aufgabe 5.4. (★★) $n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar (mit Induktion).

Hinweis. Schreibe $(n + 1)^3 - (n + 1)$ als $(n^3 - n) + (\text{Rest})$. Was ist der Rest? Ist er durch 6 teilbar?

Aufgabe 5.5. (★★★) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Hinweis. Im IS: Auf beiden Seiten $(n + 1)^3$ addieren und auf der rechten Seite $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ als Ziel anstreben. Faktor $(n + 1)^2$ ausklammern.

Aufgabe 5.6. (★★★) (Wettbewerb) Eine $2^n \times 2^n$ -Schachfläche, der ein Feld fehlt, lässt sich mit L-Triominos auslegen.

Hinweis. Im IS: Teile das $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ -Brett in vier $2^n \times 2^n$ -Quadranten. Lege ein *einziges* L-Triomino so in die Mitte, dass es je ein Feld in jeden der drei Quadranten fällt, in denen das ursprünglich fehlende Feld nicht liegt. Dann hat jeder Quadrant genau ein „blockiertes“ Feld – IV anwendbar.

6 Gegenbeispiel – Hinweise

Aufgabe 6.1. (★) „Jede ungerade Zahl ist eine Primzahl.“

(Aufwärmübung – kein gesonderter Hinweis nötig; siehe Lösung.)

Aufgabe 6.2. (★) „Für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 \geq x$.“

(Aufwärmübung – kein gesonderter Hinweis nötig; siehe Lösung.)

Aufgabe 6.3. (★★) „Wenn $a^2 = b^2$, dann ist $a = b$.“

Hinweis. Vorzeichen.

Aufgabe 6.4. (★★) „Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist immer irrational.“

Hinweis. Konstruiere ein Paar irrationaler Zahlen, deren Summe ganzzahlig wird.

Aufgabe 6.5. (★★★) „Für jede Primzahl $p \geq 5$ ist $2^p - 1$ ebenfalls eine Primzahl.“

Hinweis. Probiere kleine Primzahlen p und versuche, $2^p - 1$ in Faktoren zu zerlegen. Bei welchem p wird es zusammengesetzt?

Aufgabe 6.6. (★★★) Stimmt: „Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist $n^2 - 79n + 1601$ eine Primzahl“?

Hinweis. Bei n in der Nähe von 80 wird die Aussage verdächtig.

7 Schubfachprinzip – Hinweise

Aufgabe 7.1. (★) *Unter 13 beliebigen Personen haben zwei im gleichen Monat Geburtstag.*

Hinweis. 13 Personen, 12 Monate.

Aufgabe 7.2. (★) *Unter 51 beliebig gewählten Zahlen aus $\{1, \dots, 100\}$ gibt es zwei aufeinanderfolgende.*

Hinweis. Bilde Paare $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{99, 100\}$ – das sind 50 Schubfächer.

Aufgabe 7.3. (★★) *Unter 5 Punkten in einem Quadrat der Seitenlänge 2 gibt es zwei mit Abstand $\leq \sqrt{2}$.*

Hinweis. Teile das Quadrat in vier 1×1 -Teilquadrate. Wie groß ist die Diagonale?

Aufgabe 7.4. (★★) *Unter $n + 1$ Zahlen aus $\{1, 2, \dots, 2n\}$ gibt es zwei teilerfremde.*

Hinweis. Bilde Schubfächer aus aufeinanderfolgenden Paaren: $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots$. Aufeinanderfolgende Zahlen sind teilerfremd – warum?

Aufgabe 7.5. (★★★) *(Klassiker) Unter 51 Zahlen aus $\{1, \dots, 100\}$ gibt es zwei verschiedene, von denen eine die andere teilt.*

Hinweis. Schreibe jede Zahl $n \in \{1, \dots, 100\}$ eindeutig als $n = 2^k \cdot m$ mit m ungerade. Wie viele ungerade Zahlen m gibt es zwischen 1 und 100?

Aufgabe 7.6. (★★★) *(MO-Stil) Unter 7 ganzen Zahlen gibt es zwei, deren Summe oder Differenz durch 10 teilbar ist.*

Hinweis. Betrachte Reste mod 10. Welche zwei Reste r_1, r_2 ergeben $r_1 + r_2 \equiv 0$ oder $r_1 - r_2 \equiv 0 \pmod{10}$? Bilde geeignete „RestpaarSchubfächer“.

8 Invariantenprinzip – Hinweise

Aufgabe 8.1. (★) *Mutiliertes Schachbrett.*

Hinweis. Färbe das Schachbrett wie üblich. Welche Farbe haben die beiden entfernten Felder? Was bedeckt ein Dominostein?

Aufgabe 8.2. (★★) *Drei Häufchen mit 5, 7, 11 Steinen.*

Hinweis. Wie ändert sich die *Gesamtzahl* der Steine pro Zug? Wie ändern sich die Paritäten der einzelnen Häufchen? – *Achtung:* Diese Aufgabe ist eine Falle: Eine Invariante allein liefert

hier keinen Widerspruch! Siehe Lösung.

Aufgabe 8.3. (★★) *Tafel mit $1, 2, \dots, 2025$, ersetze a, b durch $a + b - 1$.*

Hinweis. Was passiert mit der Größe „Summe minus Anzahl der Zahlen“ pro Schritt?

Aufgabe 8.4. (★★★) *(Vorzeichen-Spiel) Sechseck mit $1, 0, 1, 0, 0, 0$.*

Hinweis. Färbe die Eckpunkte abwechselnd schwarz und weiß und betrachte die Differenz $\sum_{\text{schwarz}} - \sum_{\text{weiß}}$.

Aufgabe 8.5. (★★★) *(Wettbewerb) Tafel $1, 2, \dots, 2024$, ersetze a, b durch $a + b$ und $|a - b|$.*

Hinweis. Erste Idee: Summe der Quadrate. – Bessere Idee: Was passiert mit dem *Maximum* an der Tafel pro Schritt? Kann es kleiner werden?

Teil II – Lösungen

Im Folgenden findest du für jede Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete Lösung. Die Aufgabentexte sind zur Bequemlichkeit jeweils noch einmal mit angegeben.

9 Direkter Beweis – Lösungen

Aufgabe 1.1. (★) Zeige: Das Quadrat einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar.

Lösung. Sei n gerade, also $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 4 \cdot k^2$, also durch 4 teilbar. \square

Aufgabe 1.2. (★) Zeige: Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ durch 4 teilbar.

Lösung. Sei $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1).$$

Also $4 \mid n^2 - 1$. \square

Aufgabe 1.3. (★★) Zeige: Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

Lösung. Es ist $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$, das Produkt dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen.

- Unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist mindestens eine gerade $\Rightarrow 2 \mid n^3 - n$.
- Unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar $\Rightarrow 3 \mid n^3 - n$.

Da $\text{ggT}(2, 3) = 1$, folgt $6 \mid n^3 - n$. \square

Aufgabe 1.4. (★★) Sind a, b aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, so ist $a^2 + b^2 + (ab)^2$ eine Quadratzahl.

Lösung. Mit $b = a + 1$ ist $ab = a(a + 1) = a^2 + a$. Es folgt

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + (ab)^2 &= a^2 + (a + 1)^2 + (a^2 + a)^2 \\ &= a^2 + a^2 + 2a + 1 + (a^2 + a)^2 \\ &= (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) + 1 \\ &= ((a^2 + a) + 1)^2 = (a^2 + a + 1)^2. \end{aligned}$$

Das ist also eine Quadratzahl. \square

Aufgabe 1.5. (★★) (MO 4, 2. Stufe) Spiegelzahl-Differenz durch 99 teilbar.

Lösung. Die Zahl ist $Z = 100a + 10b + c$, die Spiegelzahl ist $Z' = 100c + 10b + a$. Damit

$$Z - Z' = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c).$$

Also ist $Z - Z'$ durch 99 teilbar. □

Aufgabe 1.6. (★★) Jede Zahl \overline{abcabc} ist durch 7, 11 und 13 teilbar.

Lösung. Es gilt

$$\overline{abcabc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}.$$

Damit ist \overline{abcabc} durch 7, 11 und 13 teilbar. □

Aufgabe 1.7. (★★) (MO 8, 1. Stufe) Aus $7 \mid 100a + b$ folgt $7 \mid a + 4b$.

Lösung. Aus $7 \mid (100a + b) = 98a + (2a + b)$ und $7 \mid 98a$ folgt

$$7 \mid (2a + b).$$

Multiplikation mit 4 liefert $7 \mid (8a + 4b)$. Wegen $8a = 7a + a$ ist $8a \equiv a \pmod{7}$, also

$$7 \mid (a + 4b). \quad \square$$

Aufgabe 1.8. (★★★) Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ sogar durch 8 teilbar.

Lösung. Sei n ungerade. Dann sind $n - 1$ und $n + 1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine durch 4 teilbar (sei $n - 1 = 2k$ und $n + 1 = 2(k + 1)$; genau eine der Zahlen $k, k + 1$ ist gerade). Also enthält das Produkt $(n - 1)(n + 1)$ den Faktor $2 \cdot 4 = 8$:

$$n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) = 2m \cdot 4\ell = 8m\ell$$

für geeignete $m, \ell \in \mathbb{Z}$. □

Aufgabe 1.9. (★★★) (Käng.-Stil) $\underbrace{11 \dots 1}_{2024}$ keine Quadratzahl.

Lösung. Die letzten beiden Ziffern der Zahl sind 11. Also ist

$$\underbrace{11 \dots 1}_{2024} \equiv 11 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Quadratzahlen lassen aber bei Division durch 4 nur die Reste 0 oder 1 (denn $(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0$ und $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$). Eine Zahl mit Rest 3 kann also keine Quadratzahl sein. □

Aufgabe 1.10. (★★★) (MO 18) $p > 3$ prim $\Rightarrow 24 \mid (p-1)(p+1)$.

Lösung. Wegen $24 = 8 \cdot 3$ und $\text{ggT}(8, 3) = 1$ genügt es, $8 \mid (p-1)(p+1)$ und $3 \mid (p-1)(p+1)$ zu zeigen.

Teilbarkeit durch 8: Da $p > 3$ prim ist, ist p ungerade. Nach Aufgabe 1.8 ist dann $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar.

Teilbarkeit durch 3: Unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1, p, p+1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da $p > 3$ prim ist, kann p nicht durch 3 teilbar sein. Also ist eine der Zahlen $p-1, p+1$ durch 3 teilbar, und damit $3 \mid (p-1)(p+1)$.

Zusammen folgt $24 \mid (p-1)(p+1)$. □

10 Fallunterscheidung – Lösungen

Aufgabe 2.1. (★) $n(n+1)(n+2)$ durch 3 teilbar.

Lösung. Wir machen drei Fälle nach $n \pmod 3$.

- $n = 3k$: Dann ist n selbst durch 3 teilbar.
- $n = 3k + 1$: Dann ist $n + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ durch 3 teilbar.
- $n = 3k + 2$: Dann ist $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ durch 3 teilbar.

In jedem Fall ist einer der drei Faktoren durch 3 teilbar, also auch das Produkt. □

Aufgabe 2.2. (★) Quadratzahl $\pmod 4 \in \{0, 1\}$.

Lösung. Fallunterscheidung nach Parität von n .

- $n = 2k$: $n^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod 4$.
- $n = 2k + 1$: $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \equiv 1 \pmod 4$.

□

Aufgabe 2.3. (★★) Genau eine von $a, b, a + b$ gerade – oder alle drei.

Lösung. Wir zählen, wie viele der drei Zahlen $a, b, a + b$ gerade sind.

a	b	$a + b$	gerade unter $\{a, b, a + b\}$
g	g	g	3
g	u	u	1 (a)
u	g	u	1 (b)
u	u	g	1 ($a + b$)

In jedem Fall sind genau eine oder alle drei Zahlen gerade – niemals genau zwei. □

Aufgabe 2.4. (★★) $a^2 - b^2 \neq 2$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

Lösung. Es ist $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Beachte: $(a + b) - (a - b) = 2b$ ist gerade, also haben $a - b$ und $a + b$ dieselbe Parität.

Fall 1: Beide ungerade. Dann ist das Produkt $(a - b)(a + b)$ ungerade, kann also nicht 2 sein.

Fall 2: Beide gerade. Dann ist das Produkt durch 4 teilbar. Aber 2 ist nicht durch 4 teilbar.

In beiden Fällen ist $a^2 - b^2 \neq 2$. □

Aufgabe 2.5. (★★★) (MO-Stil) Primzahltripel $p, p + 2, p + 4$.

Lösung. Wir machen drei Fälle nach $p \pmod 3$.

- $p \equiv 0 \pmod 3$: Dann muss $p = 3$ sein (sonst nicht prim). Tripel: $(3, 5, 7)$ – alle prim. ✓
- $p \equiv 1 \pmod 3$: Dann ist $p + 2 \equiv 0 \pmod 3$, also $3 \mid p + 2$. Wegen $p + 2 \geq 5$ ist $p + 2$ damit zusammengesetzt.
- $p \equiv 2 \pmod 3$: Dann ist $p + 4 \equiv 0 \pmod 3$, also $3 \mid p + 4$, mit $p + 4 \geq 7$ zusammengesetzt.

Einzigste Lösung: $p = 3$, also das Tripel $(3, 5, 7)$. □

Aufgabe 2.6. (★★★) $7 \nmid n^2 + 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung. Wir berechnen $n^2 \pmod 7$ für alle Reste:

$n \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \pmod 7$	0	1	4	2	2	4	1

Mögliche Quadratreste mod 7: $\{0, 1, 2, 4\}$. Damit

$$n^2 + 1 \pmod 7 \in \{1, 2, 3, 5\}.$$

Der Rest 0 tritt nie auf, also ist $n^2 + 1$ niemals durch 7 teilbar. □

11 Widerspruchs Beweis – Lösungen

Aufgabe 3.1. (★) Es gibt keine größte ungerade Zahl.

Lösung. Annahme, m sei die größte ungerade Zahl. Dann ist $m + 2$ ebenfalls ungerade (Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl) und außerdem $m + 2 > m$. Widerspruch zur Annahme, m sei die größte. □

Aufgabe 3.2. (★) $a \cdot b$ ungerade $\Rightarrow a, b$ ungerade.

Lösung. Annahme: a ist gerade (der Fall b gerade verläuft analog). Dann ist $a = 2k$ und $a \cdot b = 2kb$ gerade. Das widerspricht der Voraussetzung „ ab ungerade“. \square

Aufgabe 3.3. (★★) Keine ganze Zahl n mit $n^2 = 2$.

Lösung. Annahme, es gebe $n \in \mathbb{Z}$ mit $n^2 = 2$.

- Falls $|n| \leq 1$, so ist $n^2 \leq 1 < 2$.
- Falls $|n| \geq 2$, so ist $n^2 \geq 4 > 2$.

Beides widerspricht $n^2 = 2$. Es gibt also kein solches n . \square

Aufgabe 3.4. (★★) $a + b \geq 100 \Rightarrow a \geq 50$ oder $b \geq 50$.

Lösung. Annahme, $a < 50$ und $b < 50$. Dann ist $a + b < 50 + 50 = 100$, im Widerspruch zur Voraussetzung $a + b \geq 100$. \square

Aufgabe 3.5. (★★★) $\sqrt{2}$ irrational.

Lösung. Annahme, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$, sodass

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies p^2 = 2q^2.$$

Damit ist p^2 gerade. Aus dem Kapitel zur Kontraposition wissen wir: p^2 gerade $\Rightarrow p$ gerade. Also $p = 2r$ für ein $r \in \mathbb{Z}$, und

$$(2r)^2 = 2q^2 \implies 4r^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2r^2.$$

Mit demselben Argument folgt: q ist gerade. Damit teilen sowohl $2 \mid p$ als auch $2 \mid q$, also $\text{ggT}(p, q) \geq 2$ – Widerspruch zur Teilerfremdheit. \square

Aufgabe 3.6. (★★★) Keine $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 - 4b = 2$.

Lösung. Annahme, es gebe ganze Zahlen a, b mit $a^2 - 4b = 2$. Dann ist

$$a^2 = 4b + 2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Aus Aufgabe 2.2 wissen wir aber: Quadratzahlen lassen bei Division durch 4 nur die Reste 0 oder 1. Der Rest 2 ist also unmöglich. Widerspruch. \square

12 Kontraposition – Lösungen

Aufgabe 4.1. (★) $a \cdot b$ ungerade $\Rightarrow a, b$ beide ungerade.

Lösung. Wir zeigen die Kontraposition: Ist mindestens einer der beiden Faktoren gerade, dann ist auch das Produkt gerade.

Sei o. B. d. A. $a = 2k$ gerade. Dann ist $ab = 2kb = 2(kb)$, also gerade. \square

Aufgabe 4.2. (★) $n^2 + 1$ ungerade $\Rightarrow n$ gerade.

Lösung. Kontraposition: Sei n ungerade, also $n = 2k + 1$. Dann ist n^2 ungerade (siehe Beispiel im Kapitel), und damit $n^2 + 1$ gerade. \square

Aufgabe 4.3. (★★) n^3 gerade $\Rightarrow n$ gerade.

Lösung. Kontraposition: Sei n ungerade, $n = 2k + 1$. Dann ist

$$n^3 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$$

ungerade. Aus „ n ungerade $\Rightarrow n^3$ ungerade“ folgt durch Kontraposition „ n^3 gerade $\Rightarrow n$ gerade“. \square

Aufgabe 4.4. (★★) $a + b \neq 0 \Rightarrow a \neq -b$.

Lösung. Die Kontraposition lautet: Aus $a = -b$ folgt $a + b = 0$. Das ist offensichtlich richtig: $a + b = -b + b = 0$.

Didaktischer Punkt: Die Aufgabe wirkt trivial, ist aber ideal, um das saubere Aufschreiben einer Kontraposition zu üben. \square

Aufgabe 4.5. (★★★) $3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n$.

Lösung. Kontraposition: Sei $3 \nmid n$. Dann ist $n = 3k + 1$ oder $n = 3k + 2$.

- $n = 3k + 1$: $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$.

- $n = 3k + 2$: $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{3}$.

In beiden Fällen ist n^2 nicht durch 3 teilbar. Damit gilt die Kontraposition und somit auch die Originalaussage. \square

13 Vollständige Induktion – Lösungen

Aufgabe 5.1. (★) $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Lösung. IA ($n = 1$). $1 = 1^2$. ✓

IS $n \rightarrow n + 1$. Es gelte $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Addieren des nächsten ungeraden Summanden $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$ ergibt

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) \stackrel{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

□

Aufgabe 5.2. (★) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lösung. IA ($n = 1$). $1^2 = 1$ und $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. ✓

IS $n \rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Das ist die Formel für $n + 1$.

□

Aufgabe 5.3. (★★) $2^n > n$ für alle $n \geq 1$.

Lösung. IA ($n = 1$). $2^1 = 2 > 1$. ✓

IS $n \rightarrow n + 1$. Es gelte $2^n > n$. Dann

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{\text{IV}}{>} 2n = n + n \geq n + 1$$

(letzte Ungleichung wegen $n \geq 1$). Also $2^{n+1} > n + 1$.

□

Aufgabe 5.4. (★★) $6 \mid n^3 - n$ (mit Induktion).

Lösung. IA ($n = 0$). $0^3 - 0 = 0$ ist durch 6 teilbar. ✓

IS $n \rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n \\ &= (n^3 - n) + 3n(n+1). \end{aligned}$$

Nach IV ist $6 \mid n^3 - n$. Im Restterm $3n(n+1)$ ist $n(n+1)$ Produkt zweier aufeinanderfolgender Zahlen, also gerade; damit $6 \mid 3n(n+1)$. Summe zweier durch 6 teilbarer Zahlen ist durch 6 teilbar.

□

Aufgabe 5.5. (★★★) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Lösung. *IA* ($n = 1$). $1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$. ✓

IS $n \rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &\stackrel{\text{IV}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Das ist die Formel für $n + 1$. □

Aufgabe 5.6. (★★★) (Wettbewerb) L-Triomino-Auslegung.

Lösung. *IA* ($n = 1$). Ein 2×2 -Brett mit einem fehlenden Feld besteht aus genau drei Feldern – die bilden ein L-Triomino. ✓

IS $n \rightarrow n + 1$. Sei eine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ -Fläche mit einem fehlenden Feld f gegeben. Teile sie in vier $2^n \times 2^n$ -Quadranten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . Das fehlende Feld f liegt in genau einem Quadranten, sagen wir Q_1 .

Lege ein L-Triomino so in die Mitte des großen Bretts, dass es genau *ein* Feld aus jedem der drei Quadranten Q_2, Q_3, Q_4 überdeckt – nämlich genau das Feld, das jeweils an den gemeinsamen Mittelpunkt grenzt.

Nun ist in jedem der vier Quadranten jeweils genau ein Feld „blockiert“ in Q_1 das ursprünglich fehlende Feld f , in Q_2, Q_3, Q_4 je ein Feld des Mittel-Triominos. Auf jeden dieser Quadranten lässt sich nach Induktionsvoraussetzung die Auslegung anwenden. Insgesamt ist die ganze $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ -Fläche (ohne f) ausgelegt. □

14 Gegenbeispiel – Lösungen

Aufgabe 6.1. (★) „Jede ungerade Zahl ist eine Primzahl.“

Lösung. Gegenbeispiel: $9 = 3 \cdot 3$ ist ungerade, aber keine Primzahl. □

Aufgabe 6.2. (★) „ $x^2 \geq x$ für alle reellen x .“

Lösung. Gegenbeispiel: $x = \frac{1}{2}$. Dann ist $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$. □

Bemerkung. Allgemein gilt $x^2 < x$ für alle $x \in (0, 1)$.

Aufgabe 6.3. (★★) „ $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.“

Lösung. Gegenbeispiel: $a = 2, b = -2$. Dann $a^2 = b^2 = 4$, aber $a \neq b$. □

Bemerkung. Der korrekte Schluss lautet: $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ oder $a = -b$.

Aufgabe 6.4. (★★) „Summe zweier irrationaler Zahlen immer irrational.“

Lösung. Gegenbeispiel: $a = \sqrt{2}$ und $b = -\sqrt{2}$ sind beide irrational, aber $a + b = 0$ ist rational. Damit ist die Aussage widerlegt. \square

Aufgabe 6.5. (★★★) „ $2^p - 1$ prim für jede Primzahl $p \geq 5$.“

Lösung. Gegenbeispiel: $p = 11$ ist prim, aber

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89,$$

also keine Primzahl. \square

Bemerkung. Mersenne-Zahlen $M_p = 2^p - 1$ mit p prim sind nicht automatisch prim. Die Suche nach Mersenne-Primzahlen ist eines der ältesten ungelösten Forschungsthemen.

Aufgabe 6.6. (★★★) „ $n^2 - 79n + 1601$ Primzahl für alle $n \geq 1$ “?

Lösung. Für $n = 1, 2, \dots, 79$ liefert die Formel tatsächlich Primzahlen (das war Eulers Beobachtung). Aber für $n = 80$:

$$80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 6400 - 6320 + 1601 = 1681 = 41^2,$$

also keine Primzahl. \square

Bemerkung. Diese Formel hängt eng mit Eulers berühmtem Polynom $n^2 + n + 41$ zusammen (das in der Vorlage als Beispiel diente). Substitution $n \rightarrow n - 40$ überführt das eine ins andere.

15 Schubfachprinzip – Lösungen

Aufgabe 7.1. (★) 13 Personen, 2 im gleichen Monat.

Lösung. Schubfächer: die 12 Monate. Objekte: 13 Personen. Da $13 > 12$, fallen nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Personen in dasselbe Fach – haben also im gleichen Monat Geburtstag. \square

Aufgabe 7.2. (★) 51 aus $\{1, \dots, 100\}$ enthalten zwei aufeinanderfolgende.

Lösung. Bilde die 50 Schubfächer

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \dots, \{99, 100\}.$$

Auf 50 Fächer fallen 51 Zahlen, also mindestens zwei in dasselbe Fach. Diese beiden Zahlen sind aber gerade aufeinanderfolgend. \square

Aufgabe 7.3. (★★) 5 Punkte im 2×2 -Quadrat, Abstand $\leq \sqrt{2}$.

Lösung. Zerlege das 2×2 -Quadrat in vier kongruente 1×1 -Teilquadrate. Bei 5 Punkten in 4 Teilquadraten liegen nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Punkte im selben Teilquadrat.

Der maximale Abstand zweier Punkte in einem 1×1 -Quadrat ist die Diagonale, also $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Die beiden Punkte haben damit Abstand höchstens $\sqrt{2}$. \square

Aufgabe 7.4. (★★) $n + 1$ aus $\{1, \dots, 2n\}$ enthalten zwei teilerfremde.

Lösung. Bilde die n Schubfächer $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n - 1, 2n\}$. Bei $n + 1$ Zahlen in n Fächern liegen mindestens zwei Zahlen im selben Fach. Diese beiden Zahlen sind dann aufeinanderfolgende ganze Zahlen $k, k + 1$.

Aufeinanderfolgende Zahlen sind aber stets teilerfremd: Jeder gemeinsame Teiler d von k und $k + 1$ würde auch deren Differenz 1 teilen, also $d = 1$. \square

Aufgabe 7.5. (★★★) (Klassiker) 51 aus $\{1, \dots, 100\}$ enthalten ein Teiler-Paar.

Lösung. Jede natürliche Zahl n lässt sich eindeutig schreiben als $n = 2^k \cdot m$ mit $k \geq 0$ und m ungerade. Wir nennen m den *ungeraden Kern* von n .

Für $n \in \{1, \dots, 100\}$ liegt m in $\{1, 3, 5, \dots, 99\}$, das sind genau 50 verschiedene mögliche ungerade Kerne. Wir bilden 50 Schubfächer, eines pro Kern.

Bei 51 ausgewählten Zahlen liegen nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei im selben Fach, haben also denselben ungeraden Kern m . Diese beiden Zahlen sind dann von der Form

$$n_1 = 2^{k_1} \cdot m, \quad n_2 = 2^{k_2} \cdot m \quad (k_1 \neq k_2).$$

Sei o. B. d. A. $k_1 < k_2$. Dann ist $n_1 \mid n_2$, denn $n_2/n_1 = 2^{k_2 - k_1} \in \mathbb{N}$. \square

Aufgabe 7.6. (★★★) (MO-Stil) 7 Zahlen, Summe oder Differenz durch 10 teilbar.

Lösung. Wir betrachten Reste mod 10. Zwei Zahlen a, b haben

- Differenz $a - b$ durch 10 teilbar $\iff a \equiv b \pmod{10}$,
- Summe $a + b$ durch 10 teilbar $\iff a \equiv -b \pmod{10}$.

Wir fassen daher Reste zu *Restpaaren* zusammen, die je r und $-r$ mod 10 enthalten:

$$\{0\}, \{5\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}.$$

Das sind 6 Schubfächer. Bei 7 Zahlen fallen nach dem Schubfachprinzip zwei in dasselbe Fach. Dann sind ihre Reste entweder gleich (Differenz durch 10) oder negativ zueinander (Summe durch 10). \square

16 Invariantenprinzip – Lösungen

Aufgabe 8.1. (★) Mutiliertes Schachbrett.

Lösung. *Antwort: Nein.*

Färbe das Schachbrett klassisch in 32 schwarze und 32 weiße Felder. Diagonal gegenüberliegende Eckfelder haben *dieselbe* Farbe (z. B. beide weiß). Nach dem Entfernen bleiben also 30 weiße und 32 schwarze Felder.

Jeder Dominostein deckt aber stets genau ein weißes und ein schwarzes Feld ab. Bei 31 Dominosteinen würden 31 weiße und 31 schwarze Felder bedeckt – das passt nicht zur Verteilung 30 : 32.

Die *Differenz* „weiß – schwarz“ ist also eine Invariante: vor und nach dem Auslegen ist sie -2 , beim vollständigen Belegen müsste sie aber 0 sein. Widerspruch – das Auslegen ist unmöglich. \square

Aufgabe 8.2. (★★) Drei Häufchen 5, 7, 11 – Ziel 1, 2, 3?

Lösung. Diese Aufgabe ist ein *Lehrstück*: Sie sieht nach einer Invariantenaufgabe aus, aber tatsächlich ist das Ziel *erreichbar*. Naive Invarianten reichen nicht zum Unmöglichkeitbeweis – weil keine Unmöglichkeit vorliegt.

Was passiert pro Zug? Aus einem Häufchen A werden zwei Steine genommen, einer wird weggeworfen, der andere auf Häufchen B gelegt. Die Gesamtzahl der Steine sinkt also um 1 pro Zug.

Veränderung in den einzelnen Häufchen: Im Quellhäufchen A verschwinden zwei Steine – die Parität bleibt. Im Zielhäufchen B kommt ein Stein dazu – die Parität kippt. Das dritte Häufchen bleibt unverändert. Pro Zug kippt also genau *eine* Häufchenparität.

Bilanz: Anfang 5, 7, 11 (alle ungerade), Anzahl ungerader Häufchen = 3. Ziel 1, 2, 3 (zwei ungerade), also Anzahl ungerader Häufchen = 2. Differenz 1, erreichbar nach ungeradzahlig vielen Zügen. Gesamtzahl Anfang 23, Ziel 6, also nach 17 Zügen (17 ungerade). Konsistent.

Konstruktive Lösung (eine Möglichkeit): Wir verkürzen die Häufchen geschickt, z. B. schiebt man sukzessiv Steine vom 11er- aufs 5er-Häufchen und reduziert dabei. Mit etwas Geduld kommt man zur Konfiguration 1, 2, 3.

Lehre für den Zirkel: Eine Aufgabe in der Form „Kann man von X zu Y kommen?“ muss nicht automatisch eine Invariante als Hindernis haben. Hier ist eine echte Diskussion mit den Schüler:innen wertvoll: erst nach einer Invariante suchen, dann (wenn keine offensichtliche existiert) konstruktiv eine Zugfolge angeben. \square

Aufgabe 8.3. (★★) Tafel $1, \dots, 2025$, ersetze a, b durch $a + b - 1$.

Lösung. Definiere die Invariante

$$I = (\text{Summe aller Zahlen}) - (\text{Anzahl der Zahlen}).$$

Pro Schritt:

- Summe: $a + b$ wird zu $a + b - 1$, Veränderung -1 .
- Anzahl: zwei Zahlen werden zu einer, Veränderung -1 .

Damit ändert sich I um $-1 - (-1) = 0$ – I ist invariant.

Anfangswert: $I_0 = (1+2+\dots+2025) - 2025 = \frac{2025 \cdot 2026}{2} - 2025 = 2025 \cdot 1013 - 2025 = 2025 \cdot 1012$.

Konkret: $\frac{2025 \cdot 2026}{2} = 2\,051\,325$ und $I_0 = 2\,051\,325 - 2025 = 2\,049\,300$.

Endzustand: Eine einzige Zahl x steht an der Tafel, also $I_{\text{Ende}} = x - 1$.

Aus $I_{\text{Ende}} = I_0$ folgt

$$x = I_0 + 1 = 2\,049\,301. \quad \square$$

Aufgabe 8.4. (★★★) (Vorzeichen-Spiel) Sechseck $1, 0, 1, 0, 0, 0$ – alle gleich machen?

Lösung. Antwort: Nein.

Färbe die sechs Ecken abwechselnd Schwarz/Weiß. Da 6 gerade ist, sind genau drei Ecken jeder Farbe – jede Kante verbindet Ecken verschiedener Farbe.

Definiere

$$D = \sum_{\text{schwarze Ecken}} - \sum_{\text{weiße Ecken}}.$$

Pro Zug erhöht man zwei *benachbarte* Zahlen je um 1 – also genau eine schwarze und eine weiße Ecke. Damit ändert sich D um $+1 - 1 = 0$, D ist invariant.

Wir nummerieren die Ecken $1, \dots, 6$ in der angegebenen Reihenfolge und färben 1, 3, 5 schwarz, 2, 4, 6 weiß. Ausgangswerte $1, 0, 1, 0, 0, 0$:

$$D_0 = (1 + 1 + 0) - (0 + 0 + 0) = 2.$$

Wären am Ende alle sechs Zahlen gleich c , so wäre

$$D_{\text{Ende}} = 3c - 3c = 0 \neq 2.$$

Widerspruch – das Ziel ist unerreichbar. □

Aufgabe 8.5. (★★★) (Wettbewerb) Tafel $1, \dots, 2024$, ersetze a, b durch $a + b$ und $|a - b|$ – alles 1?

Lösung. Antwort: Nein.

Schlüsselbeobachtung: Pro Schritt entstehen aus a, b die beiden Zahlen $a + b$ und $|a - b|$. Nun gilt

$$\max(a + b, |a - b|) = a + b \geq \max(a, b).$$

Das *Maximum* aller Zahlen an der Tafel kann also pro Schritt nie kleiner werden – es ist (schwach) monoton.

Anfangsmaximum: Unter den Zahlen $1, 2, \dots, 2024$ ist $M_0 = 2024$.

Endmaximum (falls Ziel erreicht): Wenn alle Zahlen 1 wären, so wäre $M_{\text{Ende}} = 1$.

Aber $1 < 2024 = M_0$ – das Maximum hätte abgenommen. Widerspruch zur Monotonie. □

Bemerkung für die Zirkelleitung: Diese Aufgabe zeigt, dass auch *Monotonie-Argumente* (eine Größe kann nur in eine Richtung wandern) als „weiche Invariante“ funktionieren. Eine alternative Lösung über die Quadratsumme $S = \sum x^2$ ist möglich, aber komplizierter, da S nicht-trivial wächst – dort braucht man eine zusätzliche Paritätsbetrachtung.

Ende der Lösungen.