

Beweistechniken

Material für den Mathezirkel der Klasse 8

Mathezirkel — Vorbereitung auf Mathematikwettbewerbe

Schwierigkeitsskala der Aufgaben:

(★) Aufwärmübung – direkt nach Verständnis der Methode lösbar.

(★★) Übungsaufgabe – verlangt eine kleine Idee oder geschickte Umformung.

(★★★) Wettbewerbsniveau – verlangt eine echte Idee, oft Kombination von Techniken.

*Hinweise und ausgearbeitete Lösungen findet ihr im separaten Dokument **Lösungen & Hinweise**.*

Inhaltsverzeichnis

Worum geht es?	1
1 Direkter Beweis	3
2 Beweis durch Fallunterscheidung	4
3 Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis)	5
4 Beweis durch Kontraposition	6
5 Vollständige Induktion	7
6 Gegenbeispiel	9
7 Schubfachprinzip	10
8 Invariantenprinzip	11
Tipps für den Wettbewerb	13

Worum geht es?

In der Mathematik genügt es nicht, eine Behauptung an einigen Beispielen zu *prüfen*. Wir wollen *sicher* wissen, dass eine Aussage *für alle* betrachteten Objekte gilt. Dafür brauchen wir Beweise.

Ein **Beweis** ist eine Kette von logischen Schlüssen, die von bereits bekannten Tatsachen (Definitionen, Axiomen, früheren Sätzen) zu der zu zeigenden Aussage führt. In diesem Skript lernt ihr die wichtigsten Beweistechniken kennen, die euch in Wettbewerben (z. B. Mathematik-Olympiade, Bundeswettbewerb Mathematik, Känguru) und auch im weiteren Studium der Mathematik immer wieder begegnen werden.

Übersicht der Techniken

1. **Direkter Beweis:** Aus der Voraussetzung wird die Behauptung Schritt für Schritt hergeleitet.
2. **Beweis durch Fallunterscheidung:** Die möglichen Fälle werden vollständig aufgezählt und einzeln behandelt.
3. **Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis):** Man nimmt das Gegenteil der Behauptung an und führt es zu einem Widerspruch.
4. **Beweis durch Kontraposition:** Statt $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$.
5. **Vollständige Induktion:** Eine Aussage über alle natürlichen Zahlen wird durch Induktionsanfang und Induktionsschritt bewiesen.
6. **Gegenbeispiel:** Eine *Allaussage* wird widerlegt, indem ein einziges Gegenbeispiel angegeben wird.
7. **Schubfachprinzip:** Verteilt man $n + 1$ Objekte auf n Schubfächer, so liegen in einem Fach mindestens zwei Objekte.
8. **Invariantenprinzip:** Eine Größe bleibt bei allen erlaubten Operationen unverändert (oder verändert sich nur in bestimmter Weise).

1 Direkter Beweis

Idee

Bei einem *direkten Beweis* gehen wir von der Voraussetzung aus und leiten daraus durch eine Kette gültiger Schlüsse die Behauptung her. Schema:

$$\text{Voraussetzung} \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Diese Methode eignet sich besonders, wenn man die Voraussetzung gut „in die Hand nehmen“ und umformen kann (z. B. über Termumformungen, Teilbarkeit, Rechengesetze).

Beispiel

Behauptung. Die Summe zweier ungerader ganzer Zahlen ist gerade.

Beweis. Seien a und b zwei ungerade ganze Zahlen. Dann gibt es ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = 2k + 1, \quad b = 2\ell + 1.$$

Daraus folgt

$$a + b = (2k + 1) + (2\ell + 1) = 2k + 2\ell + 2 = 2(k + \ell + 1).$$

Da $k + \ell + 1 \in \mathbb{Z}$, ist $a + b$ ein gerades Vielfaches von 2, also gerade. \square

Aufgaben

1. (★) Zeige: Das Quadrat einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar.
2. (★) Zeige: Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ durch 4 teilbar.
3. (★★) Zeige: Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.
4. (★★) Zeige: Sind a und b zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, so ist $a^2 + b^2 + (ab)^2$ eine Quadratzahl.
5. (★★) (MO 4, 2. Stufe) Bilde zu einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge. Zeige, dass die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 99 teilbar ist.
6. (★★) Zeige: Jede sechsstellige Zahl der Form \overline{abcabc} ist durch 7, 11 und 13 teilbar.
7. (★★) (MO 8, 1. Stufe) Zeige: Ist $100a + b$ durch 7 teilbar, so ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar.
8. (★★★) Zeige: Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ sogar durch 8 teilbar.
9. (★★★) (Käng.-Stil) Zeige, dass die Zahl $\underbrace{11\dots1}_{2024 \text{ Einsen}}$ kein Quadrat einer ganzen Zahl ist.
10. (★★★) (MO 18, 3. Stufe) Zeige: Ist $p > 3$ eine Primzahl, so ist $(p - 1)(p + 1)$ durch 24 teilbar.

2 Beweis durch Fallunterscheidung

Idee

Manchmal lässt sich eine Aussage nicht einheitlich beweisen, sondern man muss *alle möglichen Fälle* getrennt betrachten. Wichtig sind dabei zwei Bedingungen:

- Die Fälle decken *alle* Möglichkeiten ab (Vollständigkeit).
- In jedem Fall wird die Behauptung gezeigt.

Typische Fallunterscheidungen: gerade/ungerade, Reste bei Division durch eine kleine Zahl, Vorzeichen, Größenvergleich.

Beispiel

Behauptung. Für jede ganze Zahl n ist $n^2 - n$ gerade.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: n ist gerade. Dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$. Es folgt

$$n^2 - n = (2k)^2 - 2k = 4k^2 - 2k = 2(2k^2 - k),$$

und damit ist $n^2 - n$ gerade.

Fall 2: n ist ungerade. Dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k + 1$. Es folgt

$$n^2 - n = (2k + 1)^2 - (2k + 1) = (2k + 1)((2k + 1) - 1) = (2k + 1) \cdot 2k = 2k(2k + 1),$$

und damit ist $n^2 - n$ gerade.

In beiden Fällen ist $n^2 - n$ gerade. □

Bemerkung. Eleganter geht es so: $n^2 - n = n(n - 1)$ ist Produkt zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen, von denen eine zwingend gerade sein muss.

Aufgaben

1. (★) Zeige: Für jede ganze Zahl n ist $n(n + 1)(n + 2)$ durch 3 teilbar.
2. (★) Zeige: Eine Quadratzahl lässt bei Division durch 4 stets den Rest 0 oder 1.
3. (★★) Zeige: Für alle ganzen Zahlen a, b gilt: Genau eine der drei Zahlen $a, b, a + b$ ist gerade – oder alle drei. (Anders gesagt: Niemals genau zwei von ihnen.)
4. (★★) Zeige: Die Differenz zweier Quadratzahlen ist niemals gleich 2.
5. (★★★) (MO-Stil) Bestimme alle Primzahlen p , für die auch $p + 2$ und $p + 4$ Primzahlen sind.
6. (★★★) Zeige: Für keine ganze Zahl n ist $n^2 + 1$ durch 7 teilbar.

3 Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis)

Idee

Beim *Widerspruchsbeweis* nehmen wir an, die Behauptung sei *falsch*, und leiten daraus etwas her, das offensichtlich nicht stimmen kann (einen *Widerspruch*). Da unsere Schlüsse alle korrekt waren, muss die Annahme falsch gewesen sein – die Behauptung ist also wahr. Diese Methode ist besonders nützlich, wenn die Behauptung lautet: „Es gibt kein ...“ oder „... ist nicht möglich“.

Beispiel

Behauptung (Euklid). Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis (durch Widerspruch). Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Wir können sie dann alle aufzählen:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n.$$

Betrachte nun die Zahl

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1.$$

Da $N > 1$, besitzt N einen Primteiler q . Dieser Primteiler muss in unserer Liste vorkommen, also ist $q = p_i$ für ein i . Dann teilt q aber sowohl das Produkt $p_1 p_2 \cdots p_n$ als auch N , und damit auch die Differenz

$$N - p_1 p_2 \cdots p_n = 1.$$

Eine Primzahl $q \geq 2$ kann aber nicht 1 teilen – Widerspruch! Die Annahme war falsch, es gibt also unendlich viele Primzahlen. \square

Aufgaben

1. (★) Zeige: Es gibt keine größte ungerade Zahl.
2. (★) Zeige: Sind a, b ganze Zahlen mit $a \cdot b$ ungerade, so sind sowohl a als auch b ungerade.
3. (★★) Zeige: Es gibt keine ganze Zahl n mit $n^2 = 2$. (Anders formuliert: $\sqrt{2}$ ist keine ganze Zahl.)
4. (★★) Zeige: Wenn $a + b \geq 100$ ist, dann ist mindestens eine der Zahlen a, b größer oder gleich 50.
5. (★★★) Zeige: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
6. (★★★) Zeige: Es gibt keine ganzen Zahlen a, b mit $a^2 - 4b = 2$.

4 Beweis durch Kontraposition

Idee

Eine Aussage der Form „aus A folgt B “ (Symbol: $A \Rightarrow B$) ist logisch *gleichbedeutend* zu ihrer *Kontraposition*:

$$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Statt also B aus A herzuleiten, können wir genauso gut $\neg A$ (Verneinung von A) aus $\neg B$ herleiten. Das ist oft einfacher!

Achtung: Die Kontraposition ist *nicht* dasselbe wie die *Umkehrung* $B \Rightarrow A$ – die ist im Allgemeinen falsch.

Beispiel

Behauptung. Ist n^2 gerade, so ist n gerade.

Beweis durch Kontraposition. Wir zeigen die kontrapositive Aussage:

Ist n ungerade, so ist auch n^2 ungerade.

Sei also n ungerade, d. h. $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Damit hat n^2 die Form $2m + 1$ mit $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, ist also ungerade. \square

Aufgaben

1. (★) Zeige durch Kontraposition: Ist das Produkt $a \cdot b$ ungerade, so sind a und b beide ungerade.
2. (★) Zeige durch Kontraposition: Ist $n^2 + 1$ ungerade, so ist n gerade.
3. (★★) Zeige durch Kontraposition: Ist n^3 gerade, so ist n gerade.
4. (★★) Zeige durch Kontraposition: Sind a, b ganze Zahlen mit $a + b \neq 0$, so ist $a \neq -b$.
5. (★★★) Zeige: Ist n^2 durch 3 teilbar, so ist auch n durch 3 teilbar.

5 Vollständige Induktion

Idee

Will man eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ zeigen, geht man wie folgt vor:

Induktionsanfang (IA):

Zeige, dass $A(n_0)$ wahr ist.

Induktionsschritt (IS):

Zeige, dass aus $A(n)$ stets $A(n+1)$ folgt. Dabei darf man $A(n)$ als wahr annehmen – das ist die *Induktionsvoraussetzung* (IV).

Stellt euch eine Reihe von Dominosteinen vor: Wenn der erste fällt (IA) und jeder Stein den nächsten umwirft (IS), fallen alle.

Beispiel

Behauptung (Gauß'sche Summenformel). Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang ($n = 1$). Linke Seite: 1. Rechte Seite: $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Stimmt.

Induktionsvoraussetzung. Für ein festes $n \geq 1$ gelte $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$. Wir zeigen, dass die Formel auch für $n+1$ stimmt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Das ist gerade die Formel für $n+1$. Damit ist die Behauptung für alle $n \geq 1$ bewiesen. \square

Aufgaben

1. (★) Zeige durch Induktion:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

2. (★) Zeige durch Induktion: Für alle $n \geq 1$ gilt

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. (★★) Zeige durch Induktion: Für alle $n \geq 1$ gilt $2^n > n$.

4. (★★) Zeige durch Induktion: $n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.

5. (★★★) Zeige durch Induktion: Für alle $n \geq 1$ gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Das heißt: Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist das Quadrat der Summe der ersten n Zahlen!

6. (★★★) (Wettbewerb) Eine $2^n \times 2^n$ -Schachfläche, der ein einzelnes 1×1 -Feld fehlt, soll mit *L-Triominos* (drei aneinanderhängende Felder, in L-Form) lückenlos und überlappungsfrei ausgelegt werden. Zeige durch Induktion über n , dass dies stets möglich ist.

6 Gegenbeispiel

Idee

Eine *Allaussage* der Form „für alle x gilt $A(x)$ “ wird widerlegt, indem man ein einziges x angibt, für das $A(x)$ *falsch* ist. Das nennt man ein **Gegenbeispiel**.

Wichtig:

- Ein Gegenbeispiel *widerlegt* eine Behauptung; es *beweist* aber niemals eine Behauptung.
- Auch viele Beispiele, die eine Behauptung bestätigen, ersetzen keinen Beweis!

Beispiel

Behauptung. Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl.

Bemerkung. Diese Behauptung sieht überzeugend aus – sie stimmt für $n = 0, 1, 2, \dots, 39$. Trotzdem ist sie *falsch*.

Gegenbeispiel. Für $n = 40$ erhalten wir

$$40^2 + 40 + 41 = 1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2,$$

also keine Primzahl. □

Lehre: Auch wenn eine Aussage in 40 Beispielen stimmt, kann sie im 41. versagen. Mathematik braucht Beweise, keine Vermutungen aus Stichproben.

Aufgaben

1. (★) Widerlege: „Jede ungerade Zahl ist eine Primzahl.“
2. (★) Widerlege: „Für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 \geq x$.“
3. (★★) Widerlege: „Wenn $a^2 = b^2$, dann ist $a = b$.“
4. (★★) Widerlege: „Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist immer irrational.“
5. (★★★) Behauptung: „Für jede Primzahl $p \geq 5$ ist $2^p - 1$ ebenfalls eine Primzahl.“ Widerlege diese Behauptung. (*Solche Zahlen heißen Mersenne-Zahlen; nicht alle sind prim.*)
6. (★★★) Untersuche und entscheide: Stimmt die Aussage „Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist $n^2 - 79n + 1601$ eine Primzahl“? Falls ja: beweise es. Falls nein: gib ein Gegenbeispiel.

7 Schubfachprinzip

Idee

Das **Schubfachprinzip** (auch *Dirichlet'sches Schubfachprinzip* oder engl. *pigeonhole principle*) sagt:

Verteilt man $n + 1$ Objekte auf n Schubfächer, so liegen in mindestens einem Fach mindestens zwei Objekte.

Verallgemeinerung: Verteilt man $kn + 1$ Objekte auf n Schubfächer, so liegen in mindestens einem Fach mindestens $k + 1$ Objekte.

Klingt offensichtlich – ist aber eine *extrem mächtige* Wettbewerbstechnik. Die Kunst besteht darin, die richtigen „Schubfächer“ zu finden.

Beispiel

Behauptung. In Berlin (Einwohnerzahl ca. 3,7 Millionen) gibt es zwei Personen mit *exakt* der gleichen Anzahl Haare auf dem Kopf.

Beweis. Ein Mensch hat höchstens etwa 200,000 Haare. Wir bilden also Schubfächer für jede mögliche Haaranzahl: ein Fach für 0 Haare, eines für 1 Haar, ..., eines für 200,000 Haare. Das sind 200,001 Fächer.

Wir haben aber 3,7 Millionen Berliner zu verteilen – also viel mehr Personen als Fächer. Nach dem Schubfachprinzip müssen mindestens zwei Berliner in dasselbe Fach fallen, also dieselbe Haaranzahl haben. \square

Aufgaben

1. (★) Zeige: Unter 13 beliebigen Personen haben zwei im gleichen Monat Geburtstag.
2. (★) Zeige: Wählt man aus den Zahlen $1, 2, \dots, 100$ irgendwelche 51 aus, so sind darunter zwei *aufeinanderfolgende* Zahlen.
3. (★★) Zeige: Unter 5 beliebig im Inneren oder Rand eines Quadrats der Seitenlänge 2 gewählten Punkten gibt es zwei mit Abstand höchstens $\sqrt{2}$.
4. (★★) Zeige: Wählt man aus den Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ irgendwelche $n + 1$ aus, so sind darunter zwei *teilerfremde* Zahlen.
5. (★★★) (Klassiker) Zeige: Wählt man aus den Zahlen $1, 2, \dots, 100$ irgendwelche 51 aus, so gibt es darunter zwei verschiedene Zahlen, von denen eine die andere teilt.
6. (★★★) (MO-Stil) Zeige: Unter 7 beliebigen ganzen Zahlen gibt es immer zwei, deren Summe oder Differenz durch 10 teilbar ist.

8 Invariantenprinzip

Idee

Bei vielen Wettbewerbsaufgaben wird ein Spiel oder Prozess beschrieben, in dem man bestimmte Operationen wiederholt anwenden darf. Gefragt ist, ob ein bestimmter Endzustand *erreichbar* ist.

Trick: Finde eine Größe – die **Invariante** – die sich bei *keiner* der erlaubten Operationen ändert (oder sich nur in vorhersagbarer Weise ändert, z. B. ihre Parität bleibt erhalten).

Hat der Startzustand einen anderen Wert dieser Invariante als der Zielzustand, so kann das Ziel *nicht* erreicht werden – egal wie geschickt man spielt.

Beispiel

Aufgabe. An der Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 10$. In jedem Schritt darf man zwei beliebige Zahlen a, b wegwischen und stattdessen $|a - b|$ anschreiben (so reduziert sich die Anzahl der Zahlen jeweils um eins). Nach 9 Schritten steht nur noch eine Zahl an der Tafel. Kann diese Zahl 0 sein?

Lösung. Wir suchen eine Invariante. Beobachtung: Ersetzen wir a und b durch $|a - b|$, so ändert sich die *Summe* aller Zahlen um

$$|a - b| - a - b.$$

Im Fall $a \geq b$ ist das gleich $-2b$, also gerade; im Fall $a < b$ analog $-2a$, ebenfalls gerade.

Also: *Die Parität der Summe bleibt bei jedem Schritt erhalten.*

Die Anfangssumme ist

$$1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55,$$

also *ungerade*. Daher muss auch die Endsumme ungerade sein. Die einzige Zahl an der Tafel ist also ungerade – insbesondere ist sie nicht 0. \square

Aufgaben

1. (★) Schachbrett-Aufgabe: Aus einem 8×8 -Schachbrett werden die beiden gegenüberliegenden Eckfelder entfernt (z. B. links unten und rechts oben). Kann man die verbleibenden 62 Felder vollständig mit 31 Dominosteinen (jeder 1×2) überdecken? Begründe deine Antwort mit einer Invariante.
2. (★★) Drei Häufchen. Drei Häufchen enthalten 5, 7 bzw. 11 Steine. In jedem Zug darf man von einem der Häufchen zwei Steine nehmen, einen davon endgültig wegwerfen und den anderen auf ein anderes Häufchen legen. Kann man erreichen, dass am Ende ein Häufchen 1, eines 2 und eines 3 Steine enthält?
3. (★★) Zahlen-Tafel. An der Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2025$. In jedem Schritt darf man zwei Zahlen a, b durch $a + b - 1$ ersetzen. Welche Zahl steht am Ende an der Tafel?
4. (★★★) (Vorzeichen-Spiel) An den Ecken eines Sechsecks stehen die Zahlen $1, 0, 1, 0, 0, 0$ (in dieser Reihenfolge). In jedem Zug darf man zu zwei *benachbarten* Zahlen jeweils 1 addieren. Kann man erreichen, dass am Ende alle sechs Zahlen gleich sind?
5. (★★★) (Wettbewerb) An der Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2024$. In jedem Schritt wählt man zwei Zahlen a, b aus, wischt sie weg und schreibt stattdessen $a + b$ und $|a - b|$ an. Die Gesamtanzahl der Zahlen bleibt also gleich. Kann nach endlich vielen Schritten

ein Zustand entstehen, in dem alle Zahlen an der Tafel gleich 1 sind?

Tipps für den Wettbewerb

Wie gehe ich an einen Beweis heran?

1. **Verstehe die Behauptung.** Schreibe sie in eigenen Worten auf. Was ist Voraussetzung, was Behauptung?
2. **Probiere kleine Beispiele.** Funktioniert die Behauptung für $n = 1, 2, 3$? Findest du vielleicht ein Gegenbeispiel?
3. **Wähle eine Beweistechnik.** Faustregeln:
 - „Für alle natürlichen Zahlen ...“ \rightarrow *vollständige Induktion* oder *direkter Beweis*.
 - „Es gibt kein .../ „... ist unmöglich“ \rightarrow *Widerspruchsbeweis*.
 - „Aus A folgt B und B ist schwer fassbar“ \rightarrow *Kontraposition*.
 - „Aussage hängt von Resten ab“ \rightarrow *Fallunterscheidung* (Reste mod n).
 - „Unter ... Objekten gibt es zwei mit Eigenschaft“ \rightarrow *Schubfachprinzip*.
 - „Kann ein bestimmter Zustand erreicht werden?“ \rightarrow *Invariante* suchen.
4. **Schreibe sauber auf.** Ein Beweis muss für eine Leserin nachvollziehbar sein. Jeder Schritt muss begründet sein – „offensichtlich“ gilt nicht.
5. **Prüfe am Schluss:** Habe ich wirklich *alles* gezeigt? Habe ich keinen Fall vergessen? Habe ich nicht heimlich verwendet, was ich beweisen wollte?

Häufige Fehler

- Beispiele statt Beweis: „Es klappt für $n = 1, 2, 3$, also klappt es immer.“
- Verwechslung von Aussage und Umkehrung („ $A \Rightarrow B$ “ mit „ $B \Rightarrow A$ “).
- Bei der Induktion: Induktionsanfang vergessen oder Induktionsvoraussetzung im Schritt nicht genutzt.
- Fallunterscheidung unvollständig (ein Fall vergessen).
- Im Beweis das verwenden, was zu zeigen ist (*Zirkelschluss*).

Viel Erfolg und vor allem viel Freude beim Beweisen!