Die Automorphismengruppe einer parallelisierbaren Mannigfaltigkeit als Lie-Gruppe und Anwendung auf die Isometriegruppe einer (semi-) Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Bachelorarbeit
Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik

Eingereicht von:	Maik Pickl
geb. am:	25.01.1981
in:	Halle/Saale
Betreuer:	Prof. Dr. Helga Baum
	Prof. Dr. Dorothee Schüth

Berlin, den 05. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Satz über die Lie-Gruppen Struktur der Isometrie-Gruppe einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Wichtigkeit dieses Ergebnisses begründet sich zum einen aus der besonderen Rolle der Isometrien als spezielle Invarianten eines geometrischen Raums aber auch durch deren breite Anwendung in der mathematischen Physik zur Beschreibung von Bewegungen. Die Theorie der Lie-Gruppen bietet dann einen breites Repertoire an Methoden um hier interessante Ergebnisse zu produzieren.

Der (Original-)Beweis des Satzes ist für eine Einführungsveranstaltung Differentialgeometrie zu recht anspruchsvoll, weshalb er meist als Fakt zitiert wird. Eine der Zielsetzungen dieser Arbeit ist es daher einen Beweis so zu präsentieren, dass er einem Leser mit ein bis zwei Semestern Studium der Differentialgeometrie zugänglich ist. Der Beweis der hier präsentiert wird geht auf das Paper „Automorphism Groups" von Werner Ballmann [Ball] zurück, welches selbst wiederum Argumenten aus dem Buch von Kobayashi [Kob] folgt. Die Ideen in Kapitel 2 und Kapitel 3 entstammen diesem Paper und werden dort detailliert ausgearbeitet. Dabei wurde darauf Wert gelegt nur so viel Theorie einzuführen, wie für den Beweis in dieser Form unerlässlich ist.

Das Besondere am hier vorgestellten Beweis ist zum einen, dass es sich beim Hauptergebnis um einen Satz handelt, der eine Aussage über eine gewisse Klasse von Diffeomorphismen auf einer Mannigfaltigkeit mit trivialem Tangentialbündel macht. Was zunächst wie eine starke Einschränkung aussieht wird sich in Kapitel 3 als eine wesentlich allgemeinere Aussage herausstellen. Folgt man den Bemerkungen von Kobayashi [Kob] S.42 lassen sich mit diesen Methoden auch Aussagen über konforme, affine und projektive Transformationen treffen.

Die zweite Besonderheit dieses Beweises wird verständlich, wenn man die Geschichte des Beweises über die Lie-Gruppenstruktur der Isometrien zurück verfolgt. Für den Riemannschen Fall wurde ein erster Beweis im Jahre 1939 von Myers und Steenrod [MySt] geliefert. Eine dramatische Verallgemeinerung dieses Ergebnisses wurde 1959 von Palais [Pal] gegeben. Er konnte zeigen, dass man zu jeder endlich-dimensionalen Lie-Algebra von vollständigen Vektorfeldern auf einer glatten Mannigfaltigkeit eine Lie-Gruppe assoziieren kann. In unserem Fall wird dies gerade die Lie-Algebra der vollständigen Killing-Felder sein. In Palais ca. 100-seitigem Aufsatz wird ein Beweis geführt in dem explizit eine Topologie zur jeweiligen Lie-Gruppe konstruiert wird. In der vorliegenden Arbeit hingegen werden die betrachteten Gruppen mit der Kompakt-Offen-Topologie versehen. Diese erscheint für Räume stetiger Funktionen wesentlich natürlicher und zugänglicher, was einen Vorteil dieser Herangehensweise darstellt.

Es sei bemerkt, dass der Beweis in dieser Arbeit nur für den Riemannschen Fall vollständig gelingt. Für den semi-Riemannschen Fall fehlt ein abschließendes Argument für die Abgeschlossenheit der Isometrie-Gruppe.

1.2 Grundbegriffe

In diesem Abschnitt wird die Notation in der vorliegenden Arbeit festgelegt und Begrifflichkeiten eingeführt. Darüber hinaus wird an einige Ergebnisse aus der Differentialgeometrie erinnert. Es wird darauf verzichtet grundlegende Konzepte der Differentialgeometrie wie z.B. Mannigfaltigkeiten, Diffeomorphismen, Vektorfelder, Metrik-Tensor und Ähnliches zu definieren. Dafür wird auf die Einführungsliteratur verwiesen. Für genauere Informationen sei darauf hingewiesen, dass hier im wesentlichen der Notation im Skript Differentialgeometrie von Helga Baum [Bau1] gefolgt wird.

Wir reservieren im Folgenden den Buchstaben M für eine glatte Mannigfaltigkeit (wir betrachten ausschließlich glatte Mannigfaltigkeiten) und bezeichnen Vektorfelder meist mit den Buchstaben X, Y, Z. Die Menge der glatten Vektorfelder von M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet. Wir schreiben T_xM für den Tangentialraum im Punkt $x \in M$ und TM für das Tangentialbündel. Für eine (semi-) Riemannsche Metrik nutzen wir meist den Buchstaben g und manchmal auch g_x falls wir Wert auf den Fußpunkt legen. Dann ist $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Für die Gruppe der Diffeomorphismen von M nach M schreiben wir

$$\mathrm{Diff}(M) := \{f : M \to M | f \text{ ist ein Diffeomorphismus}\}.$$

Da wir uns in dieser Arbeit ausschließlich mit Abbildungen von Mannigfaltigkeiten auf sich selbst beschäftigen, reichen uns diese Notationen aus. Für den Push-Forward eines Vektorfelds X mittels $f \in \mathrm{Diff}(M)$ schreiben wir f_*X und meinen damit

$$f_*X(f(x)) = df_x(X(x)).$$

Definition 1.1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f \in \mathrm{Diff}(M)$ heißt Isometrie, falls gilt

$$g_{f(x)}(df_x(v), df_x(w)) = g_x(v, w) \qquad \forall x \in M \text{ und } \forall v, w \in T_xM.$$

Die Isometrien bilden eine Untergruppe von $\mathrm{Diff}(M)$ die wir mit

$$\mathrm{Isom}(M, g)$$

bezeichnen.

Im Riemannschen Fall gilt folgendes wichtiges Ergebnis.

Lemma 1.2. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei d die durch g induzierte Abstandsmetrik. Sei nun $f : M \to M$ bijektiv mit der Eigenschaft*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \qquad \forall x, y \in M$$

und bezeichne $\mathrm{Isom}(M, d)$ *die Gruppe dieser Abbildungen. Dann gilt*

$$\mathrm{Isom}(M, g) = \mathrm{Isom}(M, d)$$

Beweis. Der Beweis ist recht umfangreich und wurde zuerst von Myers und Steenrod in [MySt] erbracht. Eine optimierte Version des Beweises findet man z.B. in [KoNo] Vol.1 S. 169. □

Definition 1.3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$, dann bezeichnen wir die maximale Integralkurve von X durch $p \in M$ mit $\gamma_p^X(t)$. Dabei bedeutet maximal, dass der Definitionsbereich I von $\gamma_p^X(t)$ maximal ist. Der Fluss eines Vektorfeldes ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : W \subset \mathbb{R} \times M &\to M \\ (t, x) &\mapsto \phi_t^X(x) := \gamma_x^X(t) \end{aligned}$$

Ein Vektorfeld heißt vollständig wenn alle maximalen Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Für vollständige Vektorfelder gilt für fixes $t \in \mathbb{R}$, dass $\phi_t^X \in \mathrm{Diff}(M)$. Es gilt $\phi_t^X \circ \phi_s^X = \phi_{t+s}^X$ und $\phi_0 = \mathrm{id}$. Die Flüsse eines vollständigen Vektorfeldes bilden eine 1-parametrige Untergruppe von $\mathrm{Diff}(M)$. Wir nutzen auch die Bezeichnung $\exp(sX) := \phi_s^X$ für den Fluss von X.

Das Konzept der Integralkurve lässt sich noch in gewisser Weise verallgemeinern. Dazu die folgenden Definitionen.

Definition 1.4. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine *Distribution* Δ vom Rang k auf M ist eine glatte Zuordnung

$$\begin{aligned} \Delta : M &\to TM \\ x &\mapsto E_x \subset T_xM \end{aligned}$$

wobei E_x ein k-dimensionaler Unterraum von T_xM ist. Glatt bedeutet hierbei, dass es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung U und $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ gibt, so dass

$$\Delta_y = \{X_1(y), \ldots X_k(y)\} \qquad \forall y \in U.$$

Im Fall einer Distribution vom Rang 1 können wir zur Distribution eine eindimensionale Untermanngifaltigkeit assoziieren, nämlich die maximale Integralkurve. Analog definiert man für Distributionen vom Rang k: Eine *Integralmannigfaltigkeit* einer Distribution Δ auf M ist eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ mit $T_pN = \Delta_p$ für alle $p \in N$. Eine Distribution Δ heißt *integrierbar*, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit $N(x)$ von Δ gibt mit $x \in N(x)$. In diesem Fall verläuft durch jeden Punkt $x \in M$ eine eindeutig bestimmte, maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit von Δ und es gilt:

$$N(x) := \left\{ a \in M \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \textit{ stückweise glatte Kurve } \gamma : I \to M, \\ \textit{die } x \textit{ mit } a \textit{ verbindet, mit } \gamma'(t) \in \Delta_{\gamma(t)} \ \forall t \in I \end{array} \right\}.$$

Zuletzt erinnern wir noch an Killing-Vektorfelder.

Definition 1.5. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und ϕ_t^X der Fluss von X. Dann gilt

$$X \text{ ist ein } \textit{Killing-Vektorfeld} :\Leftrightarrow \phi_t^X : U_t \subset M \to \phi_t^X(U_t) \subset M \text{ sind Isometrien.}$$

Wir bezeichnen die Menge der Killing-Vektorfelder mit $\mathfrak{Kill}(M, g)$. Wir zitieren folgende Ergebnisse über Killing-Vektorfelder.

1) Seien $X, Y \in \mathfrak{Kill}(M, g)$, dann ist auch $[X, Y] \in \mathfrak{Kill}(M, g)$.
2) Sei $X \in \mathfrak{Kill}(M, g)$. Für den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ bezüglich (M, g) gilt

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \qquad \forall Z, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

1.3 Über Lie-Gruppen

Da wir uns im besonderen für Lie-Gruppen interessieren wiederholen wir hier die grundlegenden Definitionen und beweisen einige für uns nützliche Eigenschaften von Lie-Gruppen.

Definition 1.6. Eine Gruppe G heißt *Lie-Gruppe* oder *Liesche Gruppe* falls sie eine $C^\infty-$Mannigfaltigkeit ist, so dass die Abbildung der Gruppenverknüpfung

$$\begin{array}{rcl} \cdot : G \times G & \to & G \\ (g,a) & \mapsto & g \cdot a^{-1} \end{array}$$

glatt ist.

Ist G eine Lie-Gruppe, dann sind die Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{rcll} L_g : G & \to & G & \textit{Linkstranslation} \\ a & \mapsto & g \cdot a & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} R_g : G & \to & G & \textit{Rechtstranslation} \\ a & \mapsto & a \cdot g & \end{array}$$

Diffeomorphismen.

Zu jeder Lie-Gruppe lässt sich ein Vektorraum assoziieren. Dies ist Gegenstand der nächsten Definitionen.

Definition 1.7. Ein Paar $(V, [,])$ heißt Lie-Algebra, falls V ein reeler Vektorraum ist und $[,] : V \times V \to V$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1) $[,]$ ist schiefsymmetrisch.
2) $[,]$ ist linear in beiden Komponenten.
3) Es gilt die Jacobi-Identität

$$[[X,Y]Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \qquad \forall X,Y,Z \in V.$$

Definition 1.8. Sei G eine Lie-Gruppe. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ heißt *linksinvariant* falls $(L_g)_* X = X$ für alle $g \in G$ gilt, d.h.

$$(L_g)_* X(L_g(a)) = d(L_g)_a(X(a)) = X(g \cdot a) = X(L_g(a)) \qquad \forall a, g \in G.$$

Bemerkung 1.9. Der Kommutator $[X,Y]$ zweier linksinvarianter Vektorfelder ist auch linksinvariant, denn es gilt für $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ linksinvariant,

$$(L_g)_*[X,Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X,Y].$$

Definition 1.10. Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G ist der Vektorraum aller linksinvarianten Vektorfelder von G mit dem Vektorfeld-Kommutator. Wir bezeichnen mit

$$\mathfrak{g} = LA(G)$$

die Lie-Algebra von G.

Bemerkung 1.11. Sei e das neutrale Element der Lie-Gruppe. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & T_eG \\ X & \mapsto & X(e) \end{array}$$

ein Vektorraum Isomorphismus, da $X(g) = (dL_g)_e(X(e))$ gilt. D.h. ein Linksinvariantes Vektorfeld ist durch seinen Wert im neutralen Element eindeutig festgelegt. Somit ist $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$ und man kann $\mathfrak{g}$ mit T_eG identifizieren. Die Lie-Klammer auf T_eG wird definiert durch

$$[v, w] := [V, W](e) \qquad \forall v, w \in T_eG,$$

wobei $V(g) := (dL_g)_e(v)$ und $W(g) := (dL_g)_e(w)$.

Beispiel 1.12. Die am besten bekannten Beispiele für Lie-Gruppen sind Matrizengruppen. So ist z.B,

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$$

die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen eine offene Untermannigfaltigkeit des Raumes aller $n \times n$ Matrizen. Dies folgt sofort unter Benutzung der Determinantenfunktion, $GL_n(\mathbb{R})$ ist dann gerade das Urbild von $(\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Da $GL_n(\mathbb{R})$ offen ist, folgt, dass $T_e(GL_n(\mathbb{R})) = M(n, \mathbb{R})$ die Lie-Algebra von von $GL_n(\mathbb{R})$ ist. Diese wird auch oft mit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ bezeichnet.

Das folgende Lemma wird später nützlich sein. Es besagt im Wesentlichen, dass man die Struktur einer Lie-Gruppe bzw. der Zusammenhangskomponente des neutralen Elements bereits kennt wenn man die Lie-Gruppe auf einer kleinen Umgebung des neutralen Elements kennt.

Lemma 1.13. *Sei G eine Lie-Gruppe und bezeichne G_0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements e. Sei U eine Umgebung von e. Dann wird G_0 von U erzeugt, d.h. für $g \in G_0$ eixistiert ein $k \in \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_k \in U$, so dass $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_k$.*

Beweis. Bezeichne $U^{-1} := \{g^{-1} | g \in U\}$. Dann ist U^{-1} offene Umgebung von e. Sei nun $V = U \cap U^{-1}$. Und bezeichne weiter $V^k = \{g_1 \cdot \ldots \cdot g_k | g_1, \ldots, g_k \in V\}$. Die V^k sind offen und also auch

$$W := \bigcup_{i=1}^{\infty} V^k.$$

Andererseits ist W auch abgeschlossen, denn es gilt

$$G_0 \setminus W = \underbrace{\bigcup_{a \in G_0 \setminus W} \underbrace{a \cdot W}_{\text{offen}}}_{\text{offen}}.$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Es folgt noch ein Lemma über die maximalen Integralkurven von linksinvarianten Vektorfeldern, dass uns später helfen wird die Lie-Algebra der Isometrie-Gruppe zu charakterisieren.

Lemma 1.14. *Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Bezeichne φ_X die maximale Integralkurve eines linksinvarianten Vektorfeldes $X \in \mathfrak{g}$ durch das neutrale Element $e \in G$. Dann ist φ_X auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für alle s, t im Definitionsbereich $I = (t_{min}, t_{max}) \subset \mathbb{R}$ von φ_X für die auch $s + t \in I$ liegt

$$\varphi_X(s+t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t)$$

gilt. Sei dazu $s \in I$ fixiert und setze $g := \varphi_X(s) \in G$. Wir betrachten die glatten Kurven

$$\begin{aligned} \eta : \tau \in I &\mapsto g \cdot \varphi_X(\tau) \in G, \\ \tilde{\eta} : \tau \in (t_{min} - s, t_{max} - s) &\mapsto \varphi_X(\tau + s) \in G. \end{aligned}$$

η und $\tilde{\eta}$ sind Integralkurven von X durch $g \in G$, denn $\eta(0) = g \cdot \varphi_X(0) = g$, $\tilde{\eta}(0) = \varphi_X(s) = g$ und

$$\begin{aligned} \eta'(\tau) &= dL_g(\varphi'_X(\tau)) = dL_g(X(\varphi_X(\tau))) = X(g \cdot \varphi_X(\tau)) = X(\eta(\tau)) \\ \tilde{\eta}'(\tau) &= \varphi_X(\tau + s) = X(\varphi_X(\tau + s)) = X(\tilde{\eta}(\tau)). \end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von Integralkurven stimmen η und $\tilde{\eta}$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $I \cap (t_{min} - s, t_{max} - s)$ überein. Somit gilt für alle $t \in I$ mit $t + s \in I$:

$$\eta(t) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_X(t) = \tilde{\eta}(t) = \varphi_X(s+t).$$

Wir zeigen nun, dass φ_X auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Angenommen, $t_{max} < \infty$. Sei $\alpha := \min(t_{max}, |t_{min}|)$. Wir betrachten die Kurve $\eta(s) := \varphi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \varphi_X\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)$. Dann ist $\eta(0) = \varphi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \varphi_X\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \varphi_X(0) = e$ und mit $g := \varphi_X\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\eta'(s) &= dL_g\left(\varphi_X'\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = dL_g\left(X\left(\varphi_X\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) \\
&= X\left(g \cdot \varphi_X\left(s - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \\
&= X(\eta(s)).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, dass η die Integralkurve φ_X von X über t_{max} hinaus fortsetzt, was im Widerspruch zur Maximalität von φ_X steht. Analog zeigt man, dass $t_{min} = -\infty$. □

1.4 Die Kompakt-Offen-Topologie

Per Definition trägt eine Lie-Gruppe G eine Mannigfaltigkeitsstruktur. Das heißt insbesondere, dass G ein topologischer Raum ist. Im Folgenden führen wir die Kompakt-Offen-Topologie ein, die uns als Topologie auf dem Raum der stetigen Funktionen eines topologischen Raums dient. Wir tragen zudem einige Eigenschaften zusammen, die wir später benötigen werden.

Definition 1.15. Seien X und Y topologische Räume. Sei $H \subset C^0(X,Y)$ eine beliebige Teilmenge der stetigen Abbildungen von X nach Y. Für beliebige $A \subset X$ und $B \subset Y$ definiert man die folgende Teilmenge von H:

$$\Omega(A,B) := \{f \in H | f(A) \subset B\}.$$

Das Mengensystem $\mathcal{B}_{Sub} := \{\Omega(K,O) | K \subset X \text{ kompakt und } O \subset Y \text{ offen}\}$ bildet die Subbasis einer Topologie auf H, der *Kompakt-Offen-Topologie* oder kurz $\mathcal{KO}$-Topologie. Damit ist

$$\mathcal{B}_{\mathcal{KO}} := \left\{\bigcap_{i=1}^{n} \Omega(K_i, O_i) | n \in \mathbb{N}, \Omega(K_i, O_i) \in \mathcal{B}_{Sub} \text{ für } i = 1, \ldots, n\right\}$$

eine Basis der $\mathcal{KO}$-Topologie.

Lemma 1.16. *Seien X und Y topologische Räume. Sei eine beliebige Teilmenge $H \subset C^0(X,Y)$ mit der $\mathcal{KO}$-Topologie versehen. Für $i = 1, \ldots, n$ seien $K, K_i \subset X$ kompakte Teilmengen von X und $O, O_i \subset Y$ offene Teilmengen von Y. Dann gilt:*

(i) $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega(K_i, O) = \Omega\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i, O\right)$

(ii) $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega(K, O_i) = \Omega\left(O, \bigcap_{i=1}^{n} O_i\right)$

(iii) $\bigcap_{i=1}^{n} \Omega(K_i, O_i) \subset \Omega\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i, \bigcup_{i=1}^{n} O_i\right)$

(iv) $\overline{\Omega(K,O)} \subset \Omega(K, \overline{O})$

Beweis. [Dug] S. 258 □

Es folgt eine Aussage über Abzählbarkeits- und Trennungseigenschaften des topologischen Raums $C(X) := C^0(X,X)$.

Lemma 1.17. *Sei X ein topologischer Raum. Weiter sei X lokalkompakt, T_2 und erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt für eine beliebige Teilmenge $H \subset C(X)$ ausgestattet mit der $\mathcal{KO}$-Topologie: H ist T_2 und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. siehe [Schl] □

Wir führen nun noch das Konzept der lokal gleichmäßigen Konvergenz für beliebige topologische Räume ein, dass es uns ermöglichen wird die Konvergenz in der Kompakt-Offen-Topologie zu verstehen.

Definition 1.18. Seien X, Y topologische Räume. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,Y)$ konvergiert *lokal gleichmäßig auf Kompakta* falls sie punktweise konvergiert und für den punktweisen Grenzwert $f(x) := \lim f_n(x)$ folgende Eigenschaft erfüllt ist: Sei $x \in X$ beliebig und V eine beliebige Umgebung von $f(x)$, dann exisitiert eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $x \in Int(K)$ und ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(K) \subset V$ und $f_n(K) \subset V$ für alle $n > n_0$.

Lemma 1.19. *Seien X, Y topologische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,Y)$ eine Funktionenfolge die lokal gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Kompakt-Offen-Topologie gegen f.*

Beweis. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Umgebung von f in der Kompakt-Offen-Topologie. Wir betrachten zunächst offene Mengen der Form $\Omega(K,V) = \mathcal{O}$. Sei nun $x \in K$. Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta existieren dann kompakte Teilmengen $K_x \subset X$ mit $n(x) \in \mathbb{N}$, so dass $f_n(K_x) \subset V$ für alle $n > n(x)$. Weiter gilt

$$K \subset \bigcup_{x\in K} Int(K_x)$$

und damit existiert wegen der Kompaktheit von K ein Index $l \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{l} Int(K_{x_i}).$$

Da $f_n(K_{x_i}) \subset V$ für alle $n > n(x_i)$ gilt folgt, dass $f_n \in \Omega(K_{x_i}, V)$ für alle $n > n(x_i)$. Und mit Lemma 1.16 (i) gilt dann

$$f_n \in \bigcap_{i=1}^{l} \Omega(K_{x_i}, V) = \underbrace{\Omega\left(\bigcup_{i=1}^{l} K_{x_i}, V\right)}_{\in \mathcal{B}_{Sub}} \subset \Omega(K, V)$$

für alle $n > \max\{n(x_i)|i = 1, \dots, l\}$.

Sei nun $\mathcal{O}$ eine beliebige offene Umgebung von f. Da $\mathcal{B}_{Sub}$ eine Subbasis der Kompakt-Offen-Topologie bildet existiert ein $W \subset \mathcal{O}$ derart, dass

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega(K_i, O_i)$$

für Kompakte K_i und offene O_i. Aus dem ersten Fall wissen wir, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Index $N_i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f_n \in \Omega(K_i, O_i)$ für alle $n > N_i$ gilt. Wähle nun $N := \max\{N_i|i = 1, \dots, n\}$. Dann ist $f_n \in \Omega(K_i, O_i)$ für alle $n > N$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt, dass $f_n \in W \subset \mathcal{O}$ für alle $n > N$ und damit die Behauptung.

□

1.5 Parallelisierbarkeit

Im Folgenden wird das Konzept der Parallelisierbarkeit einer Mannigfaltigkeit eingeführt. Unser Hauptergebnis wird sich dann auf solche Mannigfaltigkeiten beziehen, welche parallelisierbar sind. Im Wesentlichen sind parallelisierbare Mannigfaltigkeiten solche, auf denen eine globale Basis von glatten Vektorfeldern im Tangentialraum jedes Punktes existiert. Damit sehen wir bereits durch den Satz vom Igel, dass dies eine starke Einschränkung darstellt. Wir werden dann aber in Kapitel 3 sehen wie wir zu einer beliebigen Mannigfaltigkeit eine parallelisierbare Struktur assoziieren können, um dort dann interessante Ergebnisse über die Mannigfaltigkeit zu beweisen.

Definition 1.20. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine *Parallelisierung* oder *globaler Rahmen* ist ein Diffeomorphismus $\Phi : M \times \mathbb{R}^n \to TM$, so dass gilt:

$$\Phi(p, \cdot) : \mathbb{R}^n \to T_pM$$

ist ein linearer Isomorphismus für alle $p \in M$, wobei hier der R^n auch durch einen anderen n-dimensionalen reellen Vektorraum ersetzt werden kann.
Sei nun Φ eine Parallelisierung von M. Für jedes $z \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir ein glattes Vektorfeld Z auf M durch

$$Z(p) := \Phi(p, z).$$

Z wird *konstantes Feld* (in Bezug auf Φ) genannt. Der Vektorraum der konstanten Felder hat Dimension n.
Die *Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}(\Phi)$ ist die Gruppe aller Diffeomorphismen von M nach M, so dass

$$df(Z) = Z \circ f$$

für alle konstanten Felder Z gilt.

Bemerkung 1.21.

1) Im Allgemeinen ist der Vektorraum der konstanten Felder keine Unteralgebra der Lie-Algebra aller Vektorfelder.
2) Die Bezeichnung „konstantes Feld“ lässt sich am besten wie folgt motivieren. Jedes konstante Feld Z ist eine „konstante“ Linearkombination von bestimmten Basisvektoren. Sei dazu $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Wegen der Isomorphieeigenschaft von Φ in der 2. Komponente gilt für

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \mathbb{R}^n,$$

dass

$$Z(p) = \Phi(p, z) = \Phi\left(p, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi(p, e_i).$$

Die Koeffizientenfunktionen von Z bezüglich der Basis $E_i := \Phi(\cdot, e_i)$ sind also konstant.
3) Die Eigenschaft parallelisierbar zu sein bringt starke topologische Einschränkungen für M mit sich. So ist zum Beispiel bekannt, dass für $M = S^n$ genau dann ein globaler Rahmen existiert, wenn $n \in \{1, 3, 7\}$. Dass auf $M = S^1, S^3, S^7$ globale Rahmen existieren erkennt man an folgendem Beispiel, wenn man zusätzlich in Betracht zieht, dass auf diesen M eine Lie-Gruppen-Struktur existiert.

Beispiel 1.22. Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder. Dann ist durch

$$\begin{aligned} \Phi : G \times \mathfrak{g} &\to TG \\ (p, Z) &\mapsto Z(p) \end{aligned}$$

ein globaler Rahmen gegeben. Wir nennen Φ die *linksinvariante Parallelisierung* von G. Die Automorphismen von Φ sind die Linkstranslationen L_g für alle $g \in G$.

2 Die Automorphismengruppe einer parallelisierbaren Mannigfaltigkeit

Wir kommen nun zum Hauptergebnis der Arbeit. Zunächst legen wir einige Notationen fest.

Im Folgenden sei o.B.d.A. die Mannigfaltigkeit M stets zusammenhängend und parallelisierbar. Es bezeichne $\gamma_p^z(t)$ die maximale Integralkurve des konstanten Feldes $Z = \Phi(\cdot, z)$ mit der Anfangsbedingung $\gamma_p^z(0) = p$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{O} \subset M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \to & M \\ (p, z, t) & \mapsto & \gamma_p^z(t) \end{array}$$

eine glatte Abbildung. Weiter ist $\mathcal{O} \subset M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen und enthält die abgeschlossene Menge $M \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Es gilt:

$$\varphi(p, \alpha z, t) = \varphi(p, z, \alpha t) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$f(\varphi(p, z, t)) = \varphi(f(p), z, t) \qquad \forall f \in \mathrm{Aut}(\phi) \tag{2.2}$$

Beweis. Die erste Gleichung 2.1 ist eine direkte Konsequenz aus der Kettenregel, so dass

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\varphi(p, z, \alpha t)) & = & (\gamma_p^z(\alpha t))' = \alpha \gamma_p^z(\alpha t)' \\ & = & \alpha Z(\gamma_p^z(\alpha t)) \end{array}$$

Also ist $\gamma_p^z(\alpha t)$ die maximale Integralkurve von αZ und damit folgt die Gleichheit. Für die zweite Gleichung 2.2 bemerkt man, dass $f(\gamma_p^z(0)) = f(p)$ und nutzt die definierende Eigenschaft von $f \in \mathrm{Aut}(\phi)$

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(f(\varphi(p, z, t)) & = & f(\gamma_p^z(t))' = df_{\gamma_p^z(t)}(\gamma_p^z(t)') \\ & = & df_{\gamma_p^z(t)}(Z(\gamma_p^z(t))) = f_*(Z(\gamma_p^z(t))) = Z(f(\gamma_p^z(t)), \end{array}$$

womit man sieht, dass $f(\varphi(p, z, t))$ die maximale Integralkurve von Z durch $f(p)$ ist und die Gleichheit folgt. □

Weiter sei $\varphi_z(p) := \varphi_p(z) := \varphi(p, z, 1)$ für $z \in \mathbb{R}^n$. Dabei ist jeweils aus dem Kontext klar, welche Abbildung betrachtet wird. Bezeichne $D_z \subset M$ und $D_p \subset \mathbb{R}^n$ jeweils deren (maximalen) Definitionsbereich. Dabei ist unter Umständen $D_z = \emptyset$ für manche $z \in \mathbb{R}^n$.

Mit Gleichung 2.1 ist unter Ausnutzung der Eigenschaft lokaler Flüsse auch sofort klar, dass $\varphi_{-z} = \varphi(\cdot, z, -1) = \varphi_z^{-1}$. Zuletzt bezeichnen wir mit Γ die Familie aller lokalen Diffeomorphismen γ gegeben durch

$$\gamma = \varphi_{z_1} \circ \ldots \circ \varphi_{z_m}$$

für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und $z_i \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt, dass auch $\gamma^{-1} \in \Gamma$. Den Definitionsbereich von $\gamma \in \Gamma$ bezeichnen wir mit D_γ.

Von nun an seien alle Untergruppen $G \subset \operatorname{Aut}(\phi)$ mit der Kompakt-Offen-Topologie versehen. Wir formulieren nun die Hauptergebnisse dieses Abschnitts.

Satz 2.1. *Die Wirkung von* $\operatorname{Aut}(\Phi)$ *auf* M *ist frei, d.h. gilt* $f_1(x) = f_2(x)$ *für irgendein* $x \in M$*, dann gilt bereits* $f_1 \equiv f_2$*. Für alle* $p \in M$ *ist die Orbit-Abbildung*

$$\begin{aligned} \sigma_p : \operatorname{Aut}(\phi) &\rightarrow M \\ g &\mapsto g(p) \end{aligned}$$

eine eigentliche Abbildung, d.h. σ_p *ist stetig und die Urbilder kompakter Mengen sind kompakt. Durch* σ_p *wird* $\operatorname{Aut}(\Phi)$ *auf eine abgeschlossene Menge* $\sigma_p(\operatorname{Aut}(\phi)) \subset M$ *abgebildet.*

Korollar 2.2. *Eine Untergruppe* G *von* $\operatorname{Aut}(\phi)$ *ist abgeschlossen, genau dann wenn ein* p *existiert, so dass* $G(p) \subset M$ *abgeschlossen ist. Oder äquivalent: genau dann wenn* $G(p) \subset M$ *abgeschlossen ist für alle* $p \in M$.

Satz 2.3. *Sei* G *eine abgeschlossene Untergruppe von* $\operatorname{Aut}(\Phi)$*. Dann gilt*

1) *Für alle* $p \in M$ *ist der Orbit* $G(p)$ *eine Untermannigfaltigkeit von* M.
2) *Die glatte Struktur, die durch* σ_p *induziert wird ist unabhängig von* p *und macht* G *zu einer Lie-Transformationsgruppe auf* M.
3) *Der Bahnenraum* $G \setminus M$ *hat eine eindeutige glatte Struktur, für die die Projektion* $M \rightarrow G \setminus M$ *ein glattes Prinzipalbündel mit Strukturgruppe* G *ist.*

Punkt 3) wird für uns keine große Bedeutung haben, daher sei der interessierte Leser eingeladen sich die entsprechenden Begriffe und den Beweis in der Literatur nachzuschlagen (ein Verweis erfolgt im Beweis von Satz 2.3. Wir zitieren Punkt 3) hier nur der Vollständigkeit halber. Wir beginnen nun mit dem Beweis der Sätze 2.1 und 2.3. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Der erste Schritt, bis Lemma 2.9, besteht darin die Abgeschlossenheit von $\operatorname{Aut}(\phi)$ in der Kompakt-Offen-Topologie nachzuweisen. Dabei werden die lokalen Diffeomorphismen Γ eine wesentliche Rolle spielen, die wegen der Automorphismeneigenschaft von $f \in \operatorname{Aut}(\phi)$ in einem natürlichen Zusammenhang mit $\operatorname{Aut}(\phi)$ stehen. Dies ist Gegenstand des nächsten Lemma. Darüber hinaus weisen wir im Anschluss einige nützliche Eigenschaften von Γ nach.

Lemma 2.4. *Für alle $f \in \mathrm{Aut}(\phi)$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt,*

$$f \circ \gamma = \gamma \circ f.$$

Insbesondere ist D_γ invariant unter f (d.h. $f(D_\gamma) = D_\gamma$).

Beweis. Die Behauptung folgt sofort mit Bemerkung (3.2) oben, denn es gilt

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_z \circ f^{-1}(p) &= f(\varphi(f^{-1}(p), z, 1)) \\ &\overset{2.2}{=} \varphi(p, z, 1) \\ &= \varphi_z(p). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5. *Für alle $p \in M$ existieren offene Umgebungen $U \subset M$ von p und $V \subset \mathbb{R}^n$ von $0 \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $q \in U$ die Abbildung $\varphi_q : V \to M$ ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung von q ist.*

Beweis. Wir nutzen zum Beweis den Satz vom lokalen Diffeomorphismus. Dazu bemerken wir zunächst, dass die maximale Integralkurve des Nullvektorfelds $0 \in T_pM$ durch die konstante Kurve $\gamma_p^0(t) = p$ gegeben ist. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \phi : W \subset M \times \mathbb{R}^n &\to M \times M \\ (p, z) &\mapsto (p, \varphi_z(p)) \end{aligned}$$

wobei W eine offene Umgebung von $(p, 0)$ ist. Seien nun $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ Karten um p in M und $\overline{\psi}$ eine Karte um $\varphi_z(p)$. Dann sind $\varphi := \tilde{\varphi} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\psi := \tilde{\psi} \times \overline{\psi}$ Karten um $(p, 0)$ bzw. $(p, \varphi_z(p))$. Nach der obigen Feststellung gilt für das Differential von ϕ im Punkt $(p, 0)$ und den entsprechenden Fußpunkten von $d\varphi, d\psi$,

$$d\psi \circ d\phi_{(p,0)} \circ d(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} d(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}) & 0 \\ * & d(\overline{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist invertierbar und damit folgt die Behauptung aus dem Satz vom lokalen Diffeomorphismus. □

Bemerkung 2.6. Aus Lemma 2.5 erhalten wir insbesondere auch die folgende Aussage: sei $p \in M$, dann existiert eine Umgebung $U \subset M$ von p und eine offene Umgebung $V \subset U$ von p sowie eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in Int(K)$, so dass

$$\varphi_q(K) \subset U \qquad \forall q \in V.$$

Denn nach Lemma 2.5 finden wir $\tilde{U} \subset M \times M$ mit $(p,p) \in \tilde{U}$, so dass $\phi : \phi^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann finden wir aber eine Umgebung $U \subset M$ von p, sodass $U \times U \subset \tilde{U}$ und $\phi : \phi^{-1}(U \times U) \to U \times U$ ist immer noch ein Diffeomorphismus. Dann ist $U \times \{0\} \subset \phi^{-1}(U \times U)$, denn ϕ ist in der ersten Komponente die Identität. Dann finden wir aber ein $\varepsilon > 0$ und ein $V \subset U$, so dass

$$V \times K_\varepsilon(0) \subset \phi^{-1}(U \times U).$$

Dann gilt aber mit $K = \overline{K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}$, dass

$$\varphi_q(K) \subset U \qquad \forall q \in V.$$

Lemma 2.7. *Für alle $p, q \in M$ existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) = q$.*

Beweis. Wir zeigen, dass für alle $p \in M$ der Orbit

$$\Gamma(p) := \{\gamma(p) | \gamma \in \Gamma\}$$

ganz M ist. Dazu nutzen wir als Argument, dass M zusammenhängend ist, und weisen nach, dass $\Gamma(p)$ offen und abgeschlossen ist. Das $\Gamma(p)$ offen in M ist, folgt als Konsequenz aus Lemma 2.5. Es bleibt zu zeigen, dass $M \setminus \Gamma(p)$ offen ist. Sei dazu $x \in M \setminus \Gamma(p)$. Dann gilt aber $\Gamma(x) \subset M \setminus \Gamma(p)$. Denn angenommen es gibt ein $\tilde{x} \in \Gamma(x) \cap \Gamma(p)$, dann existieren $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit

$$\gamma_1(x) = \tilde{x} \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(p) = \tilde{x}.$$

Da aber γ^{-1} in Γ liegt für alle $\gamma \in \Gamma$, folgt

$$\gamma_1^{-1}(\tilde{x}) = x \Rightarrow \gamma_1^{-1}(\gamma_2(p)) = x$$

ein Widerspruch zur Wahl von x. Es folgt, dass $M \setminus \Gamma(p)$ offen, also $\Gamma(p)$ abgeschlossen ist. Insgesamt erhalten wir $\Gamma(p) = M$ und somit die Behauptung. $\square$

Es folgt ein technisches Lemma, dass uns dabei helfen wird globale Aussagen über bestimmte Funktionen und Vektorfelder zu treffen, die wir nur lokal, bzw. sogar nur in einem Punkt kennen.

Lemma 2.8. *Sei $f : M \to M$ eine Abbildung, für die $f \circ \gamma = \gamma \circ f$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Dann ist f glatt und es gilt $df(Z) = Z \circ f$ für alle konstanten Felder. Insbesondere ist df von maximalem Rang.*

Analog, wenn X ein Vektorfeld auf M ist, für das $X \circ \gamma = d\gamma(X)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt, dann ist X glatt und $[X, Z] = 0$ für alle konstanten Felder Z. Ist darüber hinaus X vollständig, dann ist die 1-Parameter Gruppe, die von X erzeugt wird, Teilmenge von $\mathrm{Aut}(\Phi)$.

Beweis. Sei $p \in M$ und betrachte

$$\varphi_p : V \to M,$$

wobei V wie in Lemma 2.5 gewählt ist. φ_p^{-1} ist sogar eine Karte um p. Damit gilt lokal:

$$f(\varphi_p(z)) = \varphi_{f(p)}(z).$$

Aber $\varphi_{f(p)}$ ist ein lokaler Diffeomorphismus um $f(p)$ und φ_p ist ein Diffeomorphismus um p. Die rechte Seite hängt also glatt von z ab und somit auch die linke Seite. Es folgt, dass f glatt ist, sogar ein lokaler Diffeomorphismus, womit der Rang von df maximal ist. Bezeichne nun wieder γ_p^z die maximale Integralkurve des konstanten Feldes Z durch p. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
df(Z(p)) &= df\left(\frac{d}{dt}(\varphi(p,z,t))_{|t=0}\right) \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi(p,z,t))_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi(p,tz,1))_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\varphi(f(p),tz,1))_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\varphi(f(p),z,t))_{|t=0} \\
&= Z(f(p)).
\end{aligned}$$

Womit $df(Z) = Z \circ f$ gezeigt ist.

Die Glattheit von X zeigt man mit den Gleichen Argumenten wie die Glattheit von f. Um die Behauptung über den Kommutator zu zeigen, nutzt man die spezielle Darstellung des Kommutators über lokale Flüsse, die sich in unserer Notation wie folgt liest:

$$[Z,X](p) = \frac{d}{dt}\left((d\varphi_{-tz})_{\varphi_{tz}(p)} X(\varphi_{tz}(p))\right)_{|t=0}.$$

Für eine Herleitung vgl. [Bau1]. Damit ergibt sich aber sofort mit den Eigenschaften von X für $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}
[Z,X](p) &= \frac{d}{dt}\left((d\varphi_{-tz})_{\varphi_{tz}(p)} X(\varphi_{tz}(p))\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(X(\varphi_{-tz}(\varphi_{tz}(p))))_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(X(p))_{|t=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

womit die Relation $[X, Z] = 0$ für konstante Felder Z bewiesen ist. Dass die lokalen Flüsse ϕ_t^X eines vollständigen Vektorfeldes X eine einparametrische Untergruppe von $\mathrm{Diff}(M)$ bilden, ist bekannt. Wir zeigen nur, dass die lokalen Flüsse eines Vektorfeldes X wie oben in $\mathrm{Aut}(\Phi)$ liegen. Dazu nutzen wir, dass für kommutierende Vektorfelder auch deren Flüsse kommutieren, also

$$\phi_t^X \circ \phi_s^Z = \phi_s^Z \circ \phi_t^X \text{ für alle } s, t \text{ im Definitionsbereich } \Leftrightarrow [X, Z] \equiv 0$$

vgl. [Bau1]. In unserer Notation gilt also für ein konstantes Feld Z mit der oben bewiesenen Relation für den Kommutator von X und Z,

$$\phi_t^X \circ \varphi_{sz} = \varphi_{sz} \circ \phi_t^X.$$

Ableiten nach s ergibt

$$\begin{aligned}
Z(\phi_t^X(\varphi_z(p))) &= Z(\varphi_z(\phi_t^X(p))) \\
&= \frac{d}{ds}(\varphi_{sz}(\phi_t^X(p)))_{|s=1} \\
&= \frac{d}{ds}(\phi_t^X(\varphi_{sz}(p)))_{|s=1} \\
&= d(\phi_t^x)_{\varphi_z(p)}\left(\frac{d}{ds}(\varphi_{sz}(p))_{|s=1}\right) \\
&= d(\phi_t^x)_{\varphi_z(p)}\left(Z(\varphi_z(p))\right)
\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Das folgende Lemma macht eine Aussage über das Konvergenzverhalten innerhalb von $\mathrm{Aut}(\phi)$ und wird es uns ermöglichen Satz 2.1 zu beweisen.

Lemma 2.9. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{Aut}(\Phi)$ mit der Eigenschaft, dass $(f_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für irgendein $p \in M$. Dann konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in M$. Der Punktweise Limes $f(x) := \lim f_n(x)$ liegt in $\mathrm{Aut}(\Phi)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f in der Kompakt-Offen-Topologie.*

Beweis. Wir setzen $q := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(p)$. Bezeichne weiter U_q die offene Umgebung von q, auf der φ_q ein Diffeomorphismus ist (vgl. Lemma 2.5). Wegen der Konvergenz von $(f_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ existiert ein Index n_0, so dass $f_n(p) \in U_q$ für alle $n > n_0$. Setze

$$z_n := \varphi_q^{-1}(f_n(p))$$

für $n > n_0$, dann ist $(z_n)_{n>n_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $z_n \to 0$, denn φ_q ist ein Diffeomorphismus mit $\varphi_q(0) = q$ und es gilt $\varphi_q(z_n) = f_n(p)$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\varphi(f_n(p), -z_n, 1) &= \varphi_{-z_n}(f_n(p)) \\
&= \varphi_{-z_n}(\varphi_q(z_n)) \\
&= \varphi_{-z_n}(\varphi_{z_n}(q)) \\
&= q.
\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $f_n \in \mathrm{Aut}(\Phi)$:

$$f_n^{-1}(q) = f_n^{-1}(\varphi(f_n(p), -z_n, 1)) = \varphi_p(-z_n) \overset{n\to\infty}{\to} p. \tag{2.3}$$

Wir haben also gezeigt, dass die Folge der Inversen in q gegen p konvergiert. Sei nun weiter $x = \gamma(p)$ für ein beliebiges $\gamma \in \Gamma$ mit $p \in D_\gamma$. Da D_γ eine offene Umgebung von q ist existiert ein n_1 mit $f_n^{-1}(q) \in D_\gamma$ für alle $n > n_1$. Nach Lemma 2.4 ist D_γ invariant unter $f_n \in \mathrm{Aut}(\phi)$ und damit also $q = f_n(f_n^{-1}(q)) \in D_\gamma$. Weiterhin erhalten wir mit Lemma 2.4

$$f_n(x) = f_n(\gamma(p)) = \gamma(f_n(p)) \overset{n\to\infty}{\to} \gamma(q). \tag{2.4}$$

Damit erhalten wir nach Lemma 2.7, dass $(f_n)_{n\in N}$ für alle $x \in M$ konvergiert. Aus Gleichung 2.4 wird klar, dass f mit Elementen aus Γ kommutiert. Nach Lemma 2.8 gilt damit, dass f glatt ist $f_* \circ Z = Z \circ f$ für konstante Felder. Die gleichen Argumente gelten für $f^{-1} = \lim f_n^{-1}$. Da aus Gleichung 2.3 folgt, dass $f^{-1}(q) = p$ und sich dieses Argument mit 2.4 leicht auf ganz M ausdehnen lässt erhalten wir, dass f^{-1} tatsächlich die Inverse zu f ist. Damit gilt aber $f \in \mathrm{Aut}(\phi)$.

Zur Konvergenz in der Kompakt-Offen-Topologie weisen wir nach, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. Sei dazu $x \in M$ beliebig und U eine Umgebung von $f(x)$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass U bereits wie in Bemerkung 2.6 ist. Nach Bemerkung 2.6 existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von $f(x)$ und ein Index $n_0 \in n$ mit $f_n(x) \in V$ für alle $n > n_0$ sowie ein kompaktes $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in Int(K)$, so dass

$$\varphi_{f_n(x)}(K) \subset U$$

und mit Lemma 2.4 folgt nun

$$f_n(\varphi_x(K)) = \varphi_{f_n(x)}(K) \subset U \qquad \forall n > n_0.$$

Da $\varphi_x(K)$ kompakt und $0 \in Int(K)$, also auch $x \in Int(\varphi_x(K))$, konvergiert also $(f_n)_{n\in N}$ lokal gleichmäßig auf Kompakta und somit nach Lemma 1.19 auch in der Kompakt-Offen-Topologie. □

Wir können nun Satz 2.1 beweisen.

Beweis von Satz 2.1 Angenommen $f \in \mathrm{Aut}(\phi)$ besitzt einen Fixpunkt $p \in M$. Sei $q \in M$ beliebig, dann existiert mit Lemma 2.7 ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $\gamma(p) = q$. Mit Lemma 2.4 erhalten wir:

$$f(q) = f(\gamma(p)) \overset{2.4}{=} \gamma(f(p)) = \gamma(p) = q$$

und somit gilt, da q beliebig war, $f = \mathrm{id}$. Also wirkt $\mathrm{Aut}(\phi)$ frei auf M. Dies ermöglicht es und nun sinnvoll von

$$\begin{aligned} \sigma_p^{-1} : G(p) &\rightarrow \mathrm{Aut}(\phi)) \\ f(p) &\mapsto f \end{aligned}$$

zu sprechen. Mit Lemma 2.9 und dem Fakt, dass Konvergenz in der $\mathcal{KO}$-Topologie auch punktweise Konvergenz impliziert erhalten wir nun, dass σ_p und σ_p^{-1} folgenstetig sind und mit Lemma 1.17 also stetig. Dies macht σ_p zu einem Homöomorphismus auf sein Bild und es folgt die Behauptung. $\square$

Wir werden nun Satz 2.3 beweisen. Wie wir bereits in Lemma 2.8 gesehen haben liegen die Flüsse von vollständigen Vektorfeldern, welche mit allen konstanten Feldern Z kommutieren, in $\mathrm{Aut}(\phi)$. Die Idee wird es daher sein sich eine abgeschlossene Untergruppe $G \subset \mathrm{Aut}(\phi)$ vorzugeben und solche vollständigen Vektorfelder zu betrachten, deren Flüsse ganz in G liegen. Diese werden dann eine integrierbare Distribution bilden welche uns die Mannigfaltigkeitsstruktur auf G liefert. Darüber hinaus werden wir einsehen, dass uns die Flüsse dieser Felder die Lie-Gruppen-Struktur auf G liefern.

Definition 2.10. Bezeichne $l \subset \mathfrak{X}(M)$ die Menge aller glatten Vektorfelder, für die $[X, Z] = 0$ für alle konstanten Felder Z gilt. Dann ist l eine Lie-Algebra, denn für $X, Y \in l$ gilt mit der Jacobiidentität:

$$[[X, Y], Z] = -[[Z, X], Y] - [[Y, Z], X] = 0$$

und damit $[X, Y] \in l$. Offenbar ist l ein Vektorraum und die Jacobiidentität des gewöhnlichen Kommutators von Vektorfeldern gilt auch in l.

Lemma 2.11. *Für jedes $p \in M$ ist die Auswertungsabbildung*

$$\begin{aligned} l &\rightarrow M \\ X &\mapsto X(p) \end{aligned}$$

injektiv. Also ist $\dim l \leq \dim M$.

Beweis. Sei $X \in l$ und bezeichne ϕ_s^X den Fluss von X. Aus der Riemannschen Geometrie ist bekannt (vgl. [Bau1]), dass dann gilt

$$\phi_s^X(\varphi(p, z, t)) = \varphi(\phi_s^X(p), z, t)$$

für alle s, t im Definitionsbereich von φ, ϕ_s^X. Sei $X_1, X_2 \in l$ und $X := X_1 - X_2$. Angenommen $X(p) = 0$, betrachte die Menge:

$$N := \{q \in M | X(q) = 0\}.$$

Wir werden zeigen, dass $N = M$. N ist nichtleer. Sei nun $q \in N$, wegen $X(q) = 0$ ist $\phi_s^X(q) = q$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Also

$$\phi_s^X(\varphi(q,z,t)) \equiv \varphi(q,z,t)$$

und somit ist $X(\bar{q}) = 0$ in einer Umgebung von q. Also ist N offen. Aber N ist auch abgeschlossen, da $M \setminus N$ offen ist, was sofort aus der Glattheit von X folgt. Aber M ist zusammenhängend und damit gilt

$$X \equiv 0 \Rightarrow X_1 \equiv X_2.$$

□

Sei nun $G \subset \mathrm{Aut}(\phi)$ eine abgeschlossene Untergruppe. Bezeichne mit $\mathcal{C} \subset l$ den Kegel, der von allen vollständigen $X \in l$ aufgespannt wird für die $\exp(sX) := \phi_s^X \in G$ für alle $s \in \mathbb{R}$ ist. Kegel heißt: ist $X \in \mathcal{C}$ und $t \in \mathbb{R}^+_{>0}$, dann ist auch $tX \in \mathcal{C}$.

Lemma 2.12. *Sei $g \in G$ und $X \in \mathcal{C}$. Dann ist auch $g_*X \in \mathcal{C}$.*

Beweis. Der Fluss von g_*X ist gegeben durch $g \circ \exp(sX) \circ g^{-1}$, denn

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(g \circ \exp(sX) \circ g^{-1}(p)) &= \frac{d}{dt}(g \circ \gamma_{g^{-1}(p)^X(s)}) \\
&= dg_{\exp(sX)\circ g^{-1}(p)}\left(\gamma_{g^{-1}(p)^X}(s)'\right) \\
&= dg_{\exp(sX)\circ g^{-1}(p)}\left(X(\gamma_{g^{-1}(p)^X}(s))\right) \\
&= g_*X(g \circ \exp(sX) \circ g^{-1}(p)).
\end{aligned}$$

Damit ist $\exp(sf_*X) \in G$ und vollständig und es folgt die Behauptung. □

Sei nun weiter $\mathfrak{g} \subset l$ die lineare Hülle von $\mathcal{C}$. Sei Δ die Distribution gegeben durch

$$\Delta_p := \{X(p) | X \in \mathfrak{g}\}.$$

Aus Lemma 2.11 folgt sofort, dass wenn $X_1, \dots, X_k$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ ist dann ist auch $X_1(p), \dots, X_k(p)$ eine Basis von Δ_p für alle $p \in M$. Wir wählen nun eine Basis $X_1, \dots, X_k$ von $\mathfrak{g}$, so dass $X_i \in \mathcal{C}$ für $1 \leq i \leq k$.

Sei $p \in M$ und wähle $h : U \subset \mathbb{R}^{n-k} \to M$ eine glatte Abbildung von einer offenen Menge $p \in U \subset \mathbb{R}^{n-k}$, so daß $h(u_0) = p$ für ein $u_0 \in U$ und $dh_u(\mathbb{R}^{n-k})$ ein lineares Komplement von $\Delta_{h(u)}$ ist. D.h.

$$T_{h(u)}M = dh_u(\mathbb{R}^{n-k}) \oplus \Delta_{h(u)}$$

für alle $u \in U$. Zur Konstruktion von h siehe Anhang Lemma 4.1. Für $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$ und $u \in U$ sei

$$\begin{array}{rcl} H : U \times \mathbb{R}^k & \to & M \\ (u, v) & \mapsto & \exp(v_1 X_1) \cdot \ldots \cdot \exp(v_k X_k)(h(u)) \end{array}$$

Sei nun $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$dH_{(u,0)}(e_i) = \begin{cases} dh_u(e_i) & \text{falls } 1 \leq i \leq n-k \\ X_{i-n+k}(h(u)) & \text{falls } n-k < i \leq n \end{cases}$$

und nach Konstruktion sind diese Vektoren linear unabhängig. Es folgt, dass dH maximalen Rang in $(u, 0)$ hat. Es existiert also eine offene Umgebung $O \subset \mathbb{R}^n$ von $(u, 0)$, so dass $H : O \to W := H(O)$ ein Diffeomorphismus ist. O.B.d.A. nehmen wir an, dass O von der Form $O = U \times V$ ist, falls nötig verkleinern wir O entsprechend.

Lemma 2.13. *Für alle $(u, v) \in U \times V$ gilt, dass die Vektoren $dH_{(u,v)}(e_{n-k+i})$ eine Basis von $\Delta_{H(u,v)}$ bilden. Insbesondere ist Δ integrabel und $H_{|(\{u\} \times V)}$ bildet lokal eine Karte der Integralmannigfaltigkeit von Δ durch $h(u)$.*

Beweis. Sei $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V$ und $i \in \{1, \ldots, k\}$ und sei

$$f := \exp(v_1 X_1) \ldots \exp(v_i X_i) \qquad \text{und} \qquad g := \exp(v_{i+1} X_{i+1}) \ldots \exp(v_k X_k),$$

dann liegen f, g in G. Es ist:

$$\begin{aligned} dH_{(u,v)}(e_{n-k+i}) &= \frac{d}{ds}(f \circ \exp(sX_i) \circ g(h(u)))_{|s=0} \\ &= \frac{d}{ds}(f \circ \exp(sX_i) \circ f^{-1}(f(g(h(u)))))_{|s=0} \\ &= f_* X_i(H(u, v)). \end{aligned}$$

Damit folgt mit Lemma 2.12, dass $dH_{(u,v)}(e_{n-k+i}) \in \Delta_{H(u,v)}$. Da H maximalen Rang hat folgt die Behauptung damit mit dem Satz vom lokalen Diffeomorphismus. $\square$

Ist $X \in \mathcal{C}$, so ist X tangential zu Δ. Es folgt: wenn $\exp(sX)(p) \in W$ für $0 \leq s \leq 1$, dann ist $\exp(X)(p) \in H(\{u_0\} \times V)$.

Sei nun G_0 die Untergruppe von G, die durch die Flüsse $\exp(sX)$ mit $X \in \mathcal{C}$ erzeugt wird. Nach Lemma 2.13 besteht der Orbit $G_0(p)$ aus allen $q \in M$, so dass eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \to M$ existiert mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ und γ' ist tangential zu Δ. Für den nächsten wichtigen Schritt benötigen wir zuvor noch ein analytisches Lemma.

Lemma 2.14. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus um einen Punkt $u_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, sei weiter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge mit $u_n \to u_0$ und konvergiere*

$$\frac{u_n - u_0}{\|u_n - u_0\|} \to v,$$

dann gilt mit $r_n := 1/\|u_n - u_0\|$ für n hinreichend groß für eine Konstante C:

$$\|r_n(f(u_n) - f(u_0)) - df_{u_0}(v)\| \leq C\|r_n(u_n - u_0) - v\| + Cr_n\|u_0 - u_n\|^2.$$

Beweis. Die 2. Ableitungen von f sind lokal durch eine Konstante C beschränkt. Dann gilt für die Taylorentwicklung von f am Punkt u_0

$$f(u_n) = f(u_0) + df_{u_0}(u_n - u_0) + \mathcal{O}(\|u_n - u_0\|^2) \qquad (*).$$

Weiter ist das Differential df_{u_0} beschränkt, o.B.d.A. auch durch C. Damit gilt

$$\begin{aligned}
& \|r_n(f(u_n) - f(u_0)) - df_{u_0}(v)\| \\
= \;& \|r_n(f(u_n) - f(u_0)) - df_{u_0}(v) + df_{u_0}(r_n(u_n - u_0)) - df_{u_0}(r_n(u_n - u_0))\| \\
\leq \;& \|r_n(f(u_n) - f(u_0)) - df_{u_0}(r_n(u_n - u_0))\| + \|df_{u_0}(r_n(u_n - u_0)) - df_{u_0}(v)\| \\
\overset{(*)}{\leq} \;& r_n C\|u_n - u_0\|^2 + C\|r_n(u_n - u_0) - v\|
\end{aligned}$$

□

Im abschließenden Lemma weisen wir nach, dass uns $H_{|\{\{u_0\}\times V\}}$ einen Diffeomorphismus um $p \in G(p)$ liefert, was wir dann schließlich nutzen können um die Lie-Gruppen Struktur auf G zu bestimmen.

Lemma 2.15. *Der Orbit $G_0(p)$ ist abgeschlossen in M. Wenn $W = H(U \times V)$ wie oben, dann gilt*

$$H(\{u_0\} \times V) = W \cap G_0(p) = W \cap G(p).$$

Beweis. Die Inklusionen $H(\{u_0\} \times V) \subset W \cap G_0(p) \subset W \cap G(p)$ folgen sofort aus den Definitionen. Es genügt also $W \cap G(p) \subset H(\{u_0\} \times V)$ zu zeigen.

Angenommen es gilt $W \cap G(p) \not\subset H(\{u_0\} \times V)$. Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$, so dass $g_n(p) \to p$ konvergiert. Dabei ist $g_n(p) = H(u_n, v_n)$ mit $u_n \neq u_0$. Nach Definition von H haben wir $H(u_n, v_n) = h_n(H(u_n, 0))$ für gewisse $h_n \in G$. Das heißt durch ersetzen von g_n durch $h_n^{-1}g_n$ können wir annehmen, dass $v_n = 0$. Setzen wir $r_n = \frac{1}{\|u_n - u_0\|}$ erhalten wir mit H^{-1} als Karte

$$r_n(H^{-1}(g_n(p)) - H^{-1}(p)) \to v \in S^{n-k-1} \times \{0\} \subset S^{n-1}$$

für eine Teilfolge. Setzen wir $X_p := dH_{H^{-1}(p)}(v) \in T_pM$ erhalten wir

$$r_n(H^{-1}(g_n(p)) - H^{-1}(p)) \to dH_p^{-1}(X_p) \qquad \text{mit } X_p \in T_pM, X_p \neq 0$$

Außerdem gilt $X_p \notin \Delta_p$ da Δ von den v-Richtungen aufgespannt wird. Nach Lemma 2.4 gilt $g_n \circ \gamma = \gamma \circ g_n$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Wir erhalten

$$r_n(H^{-1}(g_n(\gamma(p))) - H^{-1}(\gamma(p))) = r_n(H^{-1}(\gamma(g_n(p))) - H^{-1}(\gamma(p))) \to dH_{\gamma(p)}^{-1} d\gamma_p(X_p)$$

Nach Lemma 2.7 existiert für jedes $q \in M$ ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) = q$. Wir erhalten also ein Vektorfeld durch

$$X(q) := dH_q^{-1}(\lim r_n(H^{-1}(g_n(q)) - H^{-1}(q))).$$

Nach Konstruktion von X gilt $X \circ \gamma = d\gamma \circ X$ und damit ist X glatt nach Lemma 2.8 und es gilt $X \in l$. Wir zeigen nun, dass X vollständig ist und $\exp(sX) \in G$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und somit, dass $X \in \mathfrak{g}$, was ein Widerspruch zu $X(p) = X_p \notin \Delta_p$ ist.

Sei dazu $W_0 \subset W$ offen und V_0 Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\varphi(q, z, 1) \in W$ für alle $q \in W_0$ und $z \in V_0$ und so dass die Restriktion von φ_p auf V_0 ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung von p ist (siehe hierzu Bemerkung 2.6). Sei $s \neq 0$ so klein gewählt, dass der Fluss ϕ^X von X auf $W \times (-2|s|, 2|s|)$ definiert ist. Wir zeigen nun, dass ϕ_s^X auf ganz M definiert ist.

Bezeichne zur Abkürzung im Folgenden $f := H^{-1} \circ \varphi_z \circ H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und weiter schreiben wir kurz $\tilde{u}_n = (u_n, 0)$. Dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um $\tilde{u}_0$. Mit Lemma 2.14 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
& \|r_n(H^{-1}(g_n(q)) - H^{-1}(q)) - dH_q^{-1}(X_q)\| \\
= \; & \|r_n(H^{-1}(g_n(\varphi_z(p))) - H^{-1}(\varphi_z(p))) - dH_q^{-1} \circ (d\varphi_z)_p(X_p)\| \\
= \; & \|r_n(f(\tilde{u}_n) - f(\tilde{u}_0) - df_{\tilde{u}_0}(v)\| \\
\leq C \; & \|r_n(\tilde{u}_n - \tilde{u}_0) - v\| + Cr_n\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}_n\|^2 \\
= C \; & \left\|r_n(H^{-1}(g_n(p)) - H^{-1}(p)) - dH_p^{-1}(X_p)\right\| + r_n C \left\|H^{-1}(g_n(p)) - H^{-1}(p)\right\|^2 \\
= C \; & \left\|r_n(H^{-1}(g_n(p)) - H^{-1}(p)) - dH_p^{-1}(X_p)\right\| + \frac{C}{r_n}.
\end{aligned}$$

Da nach Definition $\|H^{-1}(g_n(p)) - H^{-1}(p)\| = 1/r_n$ gilt. Wähle nun ein $k_n \in \mathbb{Z}$ und $\rho_n \in [0, 1)$ so dass

$$r_n s = k_n + \rho_n.$$

Und da s fixiert ist, gilt

$$\frac{\rho_n}{s}\|H^{-1}(g_n(q)) - H^{-1}(q)\| \leq \frac{C}{r_n} = C\|u_n - u_0\| \qquad (*)$$

für eine Konstante C und alle q in einer hinreichend kleinen Umgebung $\tilde{U}$ von p. Wobei man hierfür die gleichmäßige Konvergenz der g_n benutzt (siehe hierzu den Beweis von Lemma 2.9). Wählt man s klein genug, so dass $\overline{U} := H(K(u_0, Cs)) \subset \tilde{U}$ so zeigt ein induktives Argument, dass $g_n^j(p) \in \overline{U}$ für alle $j \leq k_n$ und alle hinreichend großen n. Weiter können wir r_n durch k_n/s in den obigen Abschätzungen ersetzen.

Wir zeigen nun, dass $g_n^{k_n}(p) \to \phi_s^X(p)$. Dazu wählen wir eine Karte φ um p derart, dass $d\varphi^{-1}(e_1) = X$. Damit gilt $\phi_s^X(q) = \varphi^{-1}(\varphi(q) + se_1)$ lokal um p.

Die obigen Abschätzungen gelten auch in den neuen Koordinaten, da $g = \varphi^{-1} \circ g^n \circ H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus um $\tilde{u}_0$ ist. Der Kartenübergang von H zu φ ist wieder lokal beschränkt. Damit folgt mit den obigen Abschätzungen und Bemerkungen:

$$\begin{aligned}
& \|\varphi(g_n^{k_n}(p)) - \varphi(\phi_s^X(p))\| \\
= \; & \|\varphi(g_n^{k_n}(p)) - \varphi(p) - se_1\| \\
\leq \; & \|\varphi(g_n(p)) - \varphi(p) - \frac{s}{k_n}e_1\| + \|\varphi(g_n^2(p)) - \varphi(g_n(p)) - \frac{s}{k_n}e_1\| + \dots \\
\leq \; & \frac{s}{k_n}\left\|\frac{k_n}{s}(\varphi(g_n(p)) - \varphi(p)) - e_1\right\| + \frac{s}{k_n}\left\|\frac{k_n}{s}(\varphi(g_n^2(p)) - \varphi(\underbrace{g_n(p)}_{\in\overline{U}})) - e_1\right\| + \dots \\
\overset{(*)}{\leq} \; & Cs\left\|\frac{k_n}{s}(\varphi(g_n(p)) - \varphi(p)) - e_1\right\| + C\frac{s^2}{k_n}.
\end{aligned}$$

Damit folgt $g_n^{k_n}(p) \to \phi_s^X(p)$. Nach Proposition 2.1 existiert nun ein eindeutiges g^s, so daß $g^s(p) = \phi_s^X(p)$. Da G abgeschlossen ist und $g_n^{k_n}(p) \to g^s(p)$ folgt, dass $g^s \in G$. Es gilt $g^s \circ g^t(p) = g^{s+t}(p)$ für s, t hinreichend klein und damit wiederum nach Proposition 2.1, dass $g^s \circ g^t = g^{s+t}$ für s, t hinreichend klein.

Damit erzeugt die Familie $(g^t)_{t\leq s}$ eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen auf M auf die folgende Weise: Für $r \in \mathbb{R}$ beliebig existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$r = \operatorname{sign}(r)sn + s_0 \qquad \text{mit } |s_0| < s$$

Setze dann

$$g^r := (g^{\operatorname{sign}(r)s})^n \circ g^{s_0}$$

Da $d\gamma(X) = X(\gamma)$ und $\gamma \circ g^r = g^r \circ \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und $r \in \mathbb{R}$ folgern wir mit Lemma 2.7, dass g^s der Fluss von X ist. Somit ist X vollständig und $\exp(rX) \in G$ für alle r. Damit haben wir den Widerspruch. $\square$

Wir können nun Satz 2.3 beweisen.

Beweis von Satz 2.3

zu 1) Mit Lemma 2.15 bildet $\varphi := (H_{|u_0 \times V})^{-1}$ eine Karte um $p \in G(p)$. Da G durch Diffeomorphismen auf $G(p)$ wirkt, d.h. für $g \in G$ ist per Definition

$$g : G(p) \to G(p)$$

ein Diffeomorphismus, bildet damit dann $\varphi \circ g^{-1}$ eine Karte um $g(p) \in G(p)$ und es folgt 1).

zu 2) Um die Glattheit der Gruppenstruktur auf G nachzuweisen, reicht es mit Lemma 1.13 und der Bemerkung im Beweis zu 1) aus, die Glattheit auf einer Umgebung des neutralen Elements nachzuweisen. Sei dazu $X_1, \ldots, X_k$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ wie oben. Nach Lemma 2.15 ist die Karte

$$\begin{aligned} H_{|\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k &\to G(p) \subset M \\ v = (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto \exp(v_1 X_1) \cdots \exp(v_k X_k)(p) = H(u_0, v) \end{aligned}$$

ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^k$ auf eine Umgebung von p in $G(p)$. Nun ist Multiplikation und Inversion in G gleichbedeutend mit Komposition und Inversion der lokalen Flüsse der X_i nahe bei p. Da $H(u_0, \cdot)$ ein Diffeomorphismus ist hängt das Ergebnis einer solchen Operation glatt vom Input ab. Die Unabhängigkeit von p folgt mit Lemma 2.4 und Lemma 2.7. Die glatte Struktur ziehen wir nun mittels σ_p auf G zurück (siehe Satz 2.9), dies macht σ_p zu einer Einbettung. Damit folgt 2). Es folgt auch, dass $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G ist (siehe hierzu den Beweis von Satz 3.7 im nächsten Kapitel).

zu 3) Beweis siehe [Ball] oder [DuKo].

$\square$

3 Die Gruppe der Isometrien einer (semi-) Riemannschen Mannigfaltigkeit als Lie-Gruppe

3.1 Das Rahmenbündel

Wir wollen nun Satz 2.3 auf die Isometriegruppe einer (semi-) Riemannschen Mannigfaltigkeit anwenden. Da im Allgemeinen eine Mannigfaltigkeit M nicht parallelisierbar ist, führen wir zunächst kurz das Konzept eines Hauptfaserbündels (hier speziell das Reper- oder auch Rahmenbündel) ein, um die Ergebnisse aus Kapitel 2 anwenden zu können.

Definition 3.1. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Das *Rahmenbündel* $GL(M)$ ist definiert durch:

$$GL(M) := \bigcup_{x \in M} \{(a_1, \ldots, a_n)_x | a_1, \ldots, a_n \text{ ist Basis von } T_xM\}.$$

Die Projektion ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \pi : GL(M) & \to & M \\ (a_1, \ldots, a_n)_x & \mapsto & x. \end{array}$$

Auf dem Rahmenbündel existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur. Sei dazu $(U, \tilde{\varphi})$ eine Karte von Mmit $\tilde{\varphi} = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist durch

$$\begin{array}{rcl} \phi : \pi^{-1}(U) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (a_1, \ldots, a_n)_p & \mapsto & \left(dx_{j_p}(a_i)\right)_{ij} \end{array}$$

eine glatte Abbildung definiert, denn π hängt glatt von p ab und $dx_j \in \Omega^1(U)$. Die Abbildung ϕ ordnet $(a_1, \ldots, a_n)_p$ die Basistransformationsmatrix zur Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right)$ zu. Dann ist eine Karte auf $\pi^{-1}(U)$ gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \pi^{-1}(U) & \to & U \times GL_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & (\pi(u), \phi(u)), \end{array}$$

insbesondere ist damit die Dimension von $GL(M)$ gleich $n^2+n = n(n+1)$. Weiter operiert die Lie-Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ von rechts frei auf $GL(M)$. Sei dazu $g = (g_{ij})_{ij} \in GL_n(\mathbb{R})$. Die Rechtswirkung ist erklärt durch

$$(a_1, \ldots, a_n)_p.g := \left(\sum_{i=1}^n g_{i1} a_i, \ldots, \sum_{i=1}^n g_{in} a_i \right)_p .$$

Dass die Gruppenwirkung frei ist, folgt direkt aus der linearen Algebra.

Wir wollen nun nachweisen, dass $GL(M)$ für beliebige glatte Mannigfaltigkeiten parallelisierbar ist, um im Anschluss auf geeignete Weise die Isometriegruppe von M als Untergruppe der Automorphismengruppe von $GL(M)$ aufzufassen.

Lemma 3.2. *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist $GL(M)$ parallelisierbar.*

Beweis. Sei dazu $\mathcal{V} := \ker d\pi$. Sei weiter $u \in GL(M)$ und $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Dann ist durch

$$\begin{aligned} \phi_v : GL(M) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &\to \mathcal{V} \\ (u, X) &\mapsto \frac{d}{dt}(u.\exp(tX))_{|t=0} =: \tilde{X}(u) \end{aligned}$$

eine Abbildung nach $\mathcal{V}$ gegeben, wobei hier exp das gewöhnliche Matrixexponential bezeichnet, denn es gilt für $u = (u_1, \ldots, u_n)_p$

$$\begin{aligned} d\pi \left(\frac{d}{dt}(u.\exp(tX))_{|t=0} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\pi(u.\exp(tX)) \right)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (p)_{|t=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da die Wirkung von $GL_n(\mathbb{R})$ frei ist und wegen der Injektivität des Matrixexponentials, folgt damit $\dim(\ker(d\pi_u)) \geq n^2$. Die umgekehrte Abschätzung sehen wir weiter unten ein. Damit folgt, dass $\mathcal{V} = \ker d\pi \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Sei nun weiter $(u_1, \ldots, u_n)_x = u \in$

$GL(M)$ und $(z_1, \ldots, z_n) = z \in \mathbb{R}^n$. Bezeichne

$$u(z) = \sum_{i=1}^n z_i u_i \in T_x M$$

und sei $\gamma : I \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = u(z)$. Sei nun

$$\begin{aligned} \psi_{u(z)} : I &\to GL(M) \\ t &\mapsto \left(P^{\nabla}_{\gamma|[0,t]}(u_1), \ldots, P^{\nabla}_{\gamma|[0,t]}(u_n) \right)_{\gamma(t)}, \end{aligned}$$

wobei P_γ^∇ die Parallelverschiebung entlang γ und ∇ den Levi-Civita-Zusammenhang auf M bezeichnet. Setze nun

$$\phi_h(u,z) = \psi'_{u(z)}(0).$$

Nun gilt offenbar

$$\begin{aligned}
d\pi\left(\phi_h(u,z)\right) &= d\pi\left(\frac{d}{dt}(\psi_{u(z)}(t))_{t=0}\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\pi(\psi_{u(z)}(t))\right)_{t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\left(\gamma(t)\right)_{t=0}\\
&= \gamma'(0) = u(z).
\end{aligned}$$

Wählt man für z die kanonischen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$, ist klar, dass $\dim(\mathrm{Im}(d\pi_u)) \geq n$. Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt

$$\begin{aligned}
\dim(T_uGL(M)) &= n^2 + n = \underbrace{\dim(\ker(d\pi_u))}_{\geq n^2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(d\pi_u))}_{\geq n}\\
\Rightarrow \quad & \dim(\ker(d\pi_u)) = n^2 \quad \text{und} \quad \dim(\mathrm{Im}(d\pi_u)) = n.
\end{aligned}$$

Behauptung: Durch

$$\begin{aligned}
\phi : GL(M) \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n &\to TGL(M)\\
(u,X,z) &\mapsto \phi_v(u,X) + \phi_h(u,z)
\end{aligned}$$

ist eine Parallelisierung von $GL(M)$ gegeben.

Beweis der Behauptung: Wir zeigen zunächst, dass bei fixiertem u die Abbildungen $\phi_v(u,\cdot)$ und $\phi_h(u,\cdot)$ linear sind. Zunächst für $\phi_v(u,\cdot)$: Sei dazu $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL(M)$ die Abbildung $\varphi(g) = u.g$. Dann gilt für ein linksinvariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

$$\begin{aligned}
(d\varphi)_a(X(a)) &= d\varphi(dL_a(X(e)))\\
&= \frac{d}{dt}\left(\varphi(L_a(\exp(tX)))\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(u.a.\exp(tX)\right)\\
&= \phi_v(\varphi(a), X).
\end{aligned}$$

Dabei ist mit L_a die Linkstranslation gemeint und es wurde benutzt, dass gilt $X = \frac{d}{dt}(\exp(tX))_{t=0}$. Die Linearität von ϕ_v folgt nun sofort aus der Linearität des Differentials $(d\varphi)_a$.

Nun zur Linearität von ϕ_h. Sei dazu (φ, U) eine Karte auf M in Normalenkoordinaten um $x := \pi(u(z))$. Dann gilt insbesondere für die Christoffelsymbole $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$ (vgl. [Bau1]). Seien weiter

$$U_k(t) := P^{\nabla}_{\gamma_{|[0,t]}}(u_k) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

die lokalen Darstellungen bezüglich φ der parallel verschobenen Vektorfelder $U_k(t)$. Für die induzierte Karte $\tilde{\varphi}$ (siehe Definition 3.1) auf $\pi^{-1}(U) \subset GL(M)$ gilt dann

$$\begin{aligned} d\tilde{\varphi}_u(\phi_h(u,z)) &= \left(\frac{d}{dt} \left((\xi_j^i)_{i,j} \right)_{|t=0}, d\varphi_x(\gamma'(0)) \right) \\ &= \left(\left(\xi_j^i(0)' \right)_{i,j}, d\varphi_x(u(z)) \right). \end{aligned}$$

Für die parallel verschobenen Vektorfelder $U_k(t)$ gilt nun aber allgemein

$$\xi'(t) = B(t)\xi(t)$$

wobei $\xi'(t) = (\xi_1^k(t)', \ldots, \xi_n^k(t)')^t$ und $\xi(t) = (\xi_1^k(t), \ldots, \xi_n^k(t))^t$. Die Matrix $B(t)$ hat nun aber in jedem Eintrag ein Christoffelsymbol $\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$ und damit gilt $B(0) = 0$ und somit auch $\xi'(0) = 0$. Es folgt

$$d\tilde{\varphi}_u(\phi_h(u,z)) = (0, d\varphi_x(u(z)))$$

und damit

$$\phi_h(u,z) = (d\tilde{\varphi}_u)^{-1}(0, d\varphi_x(u(z))).$$

Damit folgt die Linearität von $\phi_h(u,\cdot)$ nun direkt aus der Linearität von $u(z)$ und der Linearität des Differentials. Insbesondere ist damit auch klar, dass $\phi_h(u,z)$ nicht von der Wahl der Kurve γ abhängt.

Die Glattheit von ϕ in der u-Komponente ist für ϕ_v offensichtlich, da $(u.\exp(tX))$ glatt von u abhängt. Für ϕ_h gilt sie wegen der glatten Abhängigkeit der Parallelverschiebung von den Anfangsbedingungen $u(z)$, welche wiederum glatt von u abhängen. Wir haben bereits gesehen, dass für fixiertes u die Abbildung ϕ bijektiv auf $T_uGL(M)$ ist. Damit folgt insgesamt die Behauptung. □

Im nächsten Schritt weisen wir nach, dass sich die Gruppe der Isometrien $\mathrm{Isom}(M,g)$ einer semi-riemmannschen Mannigfaltigkeit M auf kanonische Weise als Untergruppe der Automorphismengruppe von $GL(M)$ auffassen lässt. Dazu bemerken wir, dass ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ stets einen Diffeomorphimus auf $GL(M)$ induziert durch

$$\begin{aligned} \tilde{f} : GL(M) &\to GL(M) \\ (u_1, \ldots, u_n)_x &\mapsto (df_x(u_1), \ldots, df_x(u_n))_{f(x)}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise lässt sich Isom(M,g) als Untergruppe von Diff$(GL(M))$ auffassen. Dies ist eine Einbettung. Wir weisen nun nach, dass Isom(M,g) tatsächlich sogar eine Untergruppe von Aut(ϕ) ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass das Differential einer Isometrie mit der Parallelverschiebung entlang einer Kurve vertauscht.

Lemma 3.3. *Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Manngifaltigkeit und ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf M. Sei weiter $f: M \to M$ eine Isometrie, $u \in T_xM$ und $\gamma: I \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x$. Dann gilt*

$$df_{\gamma(t)} \circ P^{\nabla}_{\gamma_{|[0,t]}}(u) = P^{\nabla}_{f(\gamma)_{|[0,t]}} \circ df_x(u)$$

Beweis. Wir nutzen für den Beweis, dass für eine Isometrie f gilt

$$df(\nabla_X Y) = \nabla_{df(X)} df(Y) \qquad (*).$$

Wir zeigen, dass das Vektorfeld $df_{\gamma(t)} \circ P^{\nabla}_{\gamma_{|[0,t]}}(u)$ entlang $f(\gamma(t))$ parallelverschoben ist. Wir nehmen dazu o.B.d.A. an, dass $\gamma(I) \subset U$ für eine Kartenumgebung (U, φ) gilt, anderenfalls zerlegen wir I in Stücke die in Kartenumgebungen landen und argumentieren für diese. Für das Vektorfeld $U(t) := P^{\nabla}_{\gamma_{|[0,t]}}(u)$ entlang γ gilt dann die lokale Darstellung

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)).$$

Weiter ist das Vektorfeld $df_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right)$ ein Vektorfeld entlang $f(\gamma(t))$. Setze $\tilde{X}_i(t) := X_i(f(\gamma(t))) := df_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right)$. Damit gilt nun mit den Rechenregeln für die kovariante Ableitung entlang $f(\gamma)$ bzw. entlang γ

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}(df_{\gamma(t)}(U(t))) &= \frac{\nabla}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi(t)\tilde{X}_i(t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi'(t)\tilde{X}_i + \xi(t)\frac{\nabla \tilde{X}_i}{dt}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi'(t) df_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right) + \xi(t)\nabla_{df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma})} X_i(f(\gamma(t))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi'(t) df_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right) + \xi(t)\nabla_{df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma})} df_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi'(t) df_{\gamma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right) + \xi(t) df_{\gamma(t)}\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right) \\
&= df_{\gamma(t)}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi'(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) + \xi(t)\nabla_{\dot{\gamma}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad df_{\gamma(t)}\left(\underbrace{\frac{\nabla U}{dt}(t)}_{=0}\right) = 0.$$

Es ist also $df_{\gamma(t)}(U(t))$ parallelverschoben entlang $f(\gamma(t))$ mit Startvektor $df_x(u)$ und damit folgt die Behauptung. $\square$

Wir können jetzt beweisen, dass $\mathrm{Isom}(M, g)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\phi)$ ist.

Satz 3.4. *Sei $f \in \mathrm{Isom}(M, g)$, dann gilt für alle konstanten Felder Z auf $GL(M)$*

$$d\tilde{f}(Z) = Z \circ \tilde{f}.$$

Beweis. Wegen der Linearität des Differentials können wir für $Z(u) = \phi_v(u, X) + \phi_h(u, z)$ die Komponenten ϕ_v und ϕ_h einzeln betrachten. Zunächst für ϕ_v und $u = (u_1, \ldots, u_n)_x$. Wir bemerken noch, dass $\exp(tX)$ einen Weg durch $GL_n(\mathbb{R})$ beschreibt, der Einfachheit halber setzen wir $\exp(tX) =: V(t)$, damit gilt

$$\begin{aligned}
d\tilde{f}_u(\phi_v(u, X)) &= \frac{d}{dt}(\tilde{f}(u.\exp(tX)))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\tilde{f}(u.V(t))) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\left(df_x\left(\sum_{i=1}^{n} v(t)_{i1}u_i\right), \ldots, df_x\left(\sum_{i=1}^{n} v(t)_{in}u_i\right)\right)_{f(x)}\right)_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} v(t)_{i1}df_x(u_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} v(t)_{in}df_x(u_i)\right)_{f(x)}\right)_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((\tilde{f}(u).V(t))) \\
&= \phi_v(\tilde{f}(u), X).
\end{aligned}$$

Nun zu ϕ_h, es gilt

$$\begin{aligned}
d\tilde{f}_u(\phi_h(u, z)) &= \frac{d}{dt}(\tilde{f}(\psi_{u(z)}(t)))_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\left(df_{\gamma(t)} \circ P^{\nabla}_{\gamma_{|[0,t]}}(u_1), \ldots, df_{\gamma(t)} \circ P^{\nabla}_{\gamma_{|[0,t]}}(u_n)\right)_{f(\gamma(t))}\right)_{t=0} \\
&\overset{3.3}{=} \frac{d}{dt}\left(\left(P^{\nabla}_{f(\gamma)_{|[0,t]}}(df_x(u_1)), \ldots, P^{\nabla}_{f(\gamma)_{|[0,t]}}(df_x(u_n))\right)_{f(\gamma(t))}\right)_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\psi_{(\tilde{f}(u))(z)}(t)\right)_{t=0} \\
&= \phi_h(\tilde{f}(u), z).
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Die Isometriegruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit

Im Falle einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) haben wir nun ein einfaches Argument um die Abgeschlossenheit von $\mathrm{Isom}(M, g)$ nachzuweisen. Für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Isom}(M, g)$ die für einen Punkt $p \in M$ gegen $f(p) = \lim f_n(p)$ konvergiert wissen wir bereits mit Lemma 2.9, dass f_n überall konvergiert und dass $f \in \mathrm{Aut}(\phi)$ liegt. Wir weisen nun noch nach, dass f dann auch in $\mathrm{Isom}(M, g)$ liegt.

Lemma 3.5. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{Isom}(M, g)$ die für einen Punkt $p \in M$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überall und der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim f_n(x)$ liegt wieder in $\mathrm{Isom}(M, g)$. Darüber hinaus konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in der Kompakt-Offen-Topologie gegen f.*

Beweis. Mit Lemma 2.9 ist klar, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Kompakt-Offen-Topologie gegen ein $f \in \mathrm{Aut}(\phi)$ konvergiert. Wir nutzen nun, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Isom}(M, d)$, siehe hierzu Lemma 1.2. Dann gilt für $x, y \in M$, da die Abstands-Metrik d stetig ist:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(\lim f_n(x), \lim f_n(y)) \\ &= \lim d(f_n(x), f_n(y)) \\ &= \lim d(x, y) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Die gleichen Argumente gelten auch für die Umkehrabbildung f^{-1} und damit folgt die Behauptung. □

Nun sind die Ergebnisse aus Kapitel 2 auf $\mathrm{Isom}(M, g)$ für den Riemannschen Fall anwendbar.

Satz 3.6. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist $\mathrm{Isom}(M, g)$ eine Lie-Gruppe.*

Beweis. Wir haben gesehen, dass wir $\mathrm{Isom}(M, g)$ als abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\phi)$ auffassen können, wobei ϕ die Parallelisierung von $GL(M)$ wie in Lemma 3.2 ist. Die Behauptung folgt nun mit Satz 2.3. □

3.3 Die Lie-Algebra der vollständigen Killing-Vektorfelder der Isometriegruppe einer (semi-) Riemannschen Mannigfaltigkeit

Wir untersuchen im Folgenden die Lie-Algebra von $\mathrm{Isom}(M,g)$ einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Wie sich zeigt, ist dies gerade der Vektorraum der vollständigen Killing-Vektorfelder. Mit Satz 2.3 und der Tatsache, dass wir $\mathrm{Isom}(M,g)$ innerhalb der Automorphismengruppe von $GL(M)$ auffassen erhalten wir bereits eine Abschätzung für die Dimension von $\mathrm{Isom}(M,g)$ über die Dimension von $GL(M)$, es gilt

$$\dim(\mathrm{Isom}(M,g)) \leq n(n+1).$$

Die Bestimmung der Lie-Algebra von $\mathrm{Isom}(M,g)$ ermöglicht uns aber eine schärfere Abschätzung für die Dimension der Isometriegruppe anzugeben.

Satz 3.7. *Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und* $\mathrm{Isom}(M,g)$ *die zugehörige Isometriegruppe. Dann ist die Lie-Algebra von* $\mathrm{Isom}(M,g)$ *gegeben durch*

$$\mathfrak{Kill}_c(M,g) := \{X \in \mathfrak{Kill}(M,g) | X \textit{ ist vollständig } \}.$$

Beweis. Wir wissen, dass die lokalen Flüsse $\phi_t^X : M \to M$ eines vollständigen Killing-Vektorfelds X Isometrien sind. Wegen der Gruppeneigenschaft der Flüsse ist außerdem $\phi_0^X = \mathrm{id}_M$. Damit erhalten wir folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{Kill}_c(M,g) &\to \mathfrak{g} \simeq T_eG \\ X &\mapsto \frac{d}{dt}(\phi_t^X)_{t=0}. \end{aligned}$$

θ ist injektiv, da X durch seine lokalen Flüsse eindeutig bestimmt ist. Sei nun andererseits $Y \in \mathfrak{g}$ und $\varphi_Y(t)$ die maximale Integralkurve von Y durch das neutrale Element $e = \mathrm{id}_M \in \mathrm{Isom}(M,g)$. Dann erhalten wir ein Vektorfeld $\tilde{Y}$ durch

$$\begin{aligned} \Theta : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{X}(M) \\ Y &\mapsto \frac{d}{dt}(\varphi_Y(t))_{t=0} \end{aligned}$$

mit $\tilde{Y}(p) = \frac{d}{dt}(\varphi_Y(t)(p))_{t=0}$. Die lokalen Flüsse von $\tilde{Y}$ sind gerade die $\varphi_Y(t)$ und damit Isometrien. Wegen Lemma 1.14 sind die Flüsse vollständig und damit $\tilde{Y} \in \mathfrak{Kill}_c$. □

Wir möchten nun eine Abschätzung für die Dimension von $\mathrm{Isom}(M,g)$ angeben. Wie wir gerade gesehen haben bildet $\mathfrak{Kill}_c(M,g)$ die Lie-Algebra von $\mathrm{Isom}(M,g)$. Es genügt also eine Abschätzung der Dimension von $\mathfrak{Kill}_c(M,g)$ anzugeben. Dazu benötigen wir ein Ergebnis, dass gewöhnlich mithilfe der Theorie der Jacobi-Felder bewiesen wird. Wir zitieren daher diesen Fakt an dieser Stelle nur.

Lemma 3.8. *Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{Kill}(M,g)$. Sei weiter ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M, dann ist X eindeutig bestimmt durch den Wert und $X(p)$ und $\nabla X(p)$, d.h. gilt für $X, Y \in \mathfrak{Kill}(M,g)$, dass $X(p) = Y(p)$ und $\nabla X(p) = \nabla Y(p)$ dann folgt $X = Y$.*

Damit können wir den folgenden Satz zeigen.

Satz 3.9. *Sei (M^n, g) eine n-dimensionale zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt*

$$\dim(\mathfrak{Kill}_c(M,g)) \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Nach Lemma 3.8 genügt es die die Freiheitsgrade der beiden Bedingungen $X(p)$, $\nabla X(p)$ in einem Punkt $p \in M$ zu prüfen. Sei also wieder X ein Killingvektorfeld. Offenbar hat X im Punkt p maximal n Freiheitsgrade, da der Tangentialraum n-dimensional ist.

Der LC-Zusammenhang ist im Indexargument eine lineare Abbildung vom Tangentialraum in den Tangentialraum. Für den LC-Zusammenhang gilt nun für Killingfelder:

$$g(\nabla_Y X, Z) = -g(Y, \nabla_Z X).$$

Damit ist $\nabla_\bullet X$ eine schiefsymmetrische lineare Abbildung. Die Dimension der schiefsymmetrischen linearen Abbildungen ist gerade $\frac{1}{2}n(n-1)$. Um dies einzusehen identifizieren wir T_pM mit dem $\mathbb{R}^n$, dann sind die schiefsymmetrischen Linearen Abbildungen gerade die schiefsymmetrischen Matrizen $\mathfrak{so}(n)$. Insgesamt folgt, dass wir eine injektive Abbildung haben

$$\begin{aligned} g : \mathfrak{Kill}(M) &\to T_pM \times \mathfrak{so}(T_pM) \\ X &\mapsto (X(p), \nabla X(p)). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{so}(T_pM)$ die schiefsymmetrischen linearen Endomorphismen in T_pM. Die Injektivität folgt wiederum aus Lemma 3.8.

Damit können wir die Dimension von $\mathfrak{Kill}_c(M,g)$ abschätzen durch:

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{Kill}_c(M,g)) &\leq \dim(\mathfrak{Kill}(M,g)) \\ &\leq \dim(T_pM) + \dim(\mathfrak{so}(T_pM)) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

4 Anhang

Lemma 4.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei weiter $p \in M$ und (U, φ) eine Kartenumgebung von p. Ist nun Δ eine geometrische Distribution vom Rang k auf M mit einer lokalen Basis $\Delta_x = \{X_1(x), \ldots, X_k(x) | x \in U\}$, dann existiert eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ und eine glatte Funktion*

$$h : V \to U$$

mit $h(v_0) = p$ für ein $v_0 \in V$ und es gilt

$$T_{h(v)}M = \Delta_{h(v)} \oplus dh(\mathbb{R}^{n-k}) \qquad \forall v \in V.$$

Beweis. Seien $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ die kanonischen Basisvektoren bezüglich φ auf U. Mit dem Basisergänzungssatz können wir nun im Punkt p die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_k(p)$ durch die kanonischen Basisvektoren zu einer Basis von T_pM ergänzen. O.B.d.A. seien dies die letzten k kanonischen Basisvektoren, so dass

$$\operatorname{span}\left(X_1(p), \ldots, X_k(p), \frac{\partial}{\partial x_{n-k}}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right) = T_pM$$

Sei weiter $A \in C(U, \mathbb{R}^{n^2})$ die Übergangsmatrix von der kanonischen Basis zur Menge $X_1, \ldots, X_k, \frac{\partial}{\partial x_{n-k}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, d.h.

$$A(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(x) \\ \vdots \\ X_k(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_{n-k}}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \qquad \forall x \in U.$$

Dann gilt in p, dass $\det(A(p)) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $f := \det(A(\cdot)) : U \to \mathbb{R}$, ist dann $f^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) =: \tilde{U} \subset U$ derart, dass $X_1, \ldots, X_k, \frac{\partial}{\partial x_{n-k}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ eine Basis von T_xM für alle $x \in \tilde{U}$ ist. Dann ist aber für $V := \varphi^{-1}(\tilde{U}) \cap \mathbb{R}^{n-k}$

$$h := \varphi_{|\mathbb{R}^{n-k}} : V \to U$$

die gesuchte Abbildung. $\square$

Literaturverzeichnis

[Ball] Ballmann, W.: Automorphism Groups. Skript. http://people.mpim-bonn.mpg.de/hwbllmnn/notes.html

[Bau1] Baum, H.: Differentialgeometrie. Skript. http://www2.mathematik.hu-berlin.de/ diffgeo/index.php?seite=baum

[Bau2] Baum, H.: Eichfeldtheorie. Springer-Verlag 2009

[Dug] Dugundji, J.: Topology. McGraw-Hill Inc. 1966

[DuKo] Duistermaat, J., Kolk J.: Lie-Groups. Springer-Verlag 1991

[Kob] Kobayashi, S.: Transformation Groups in Differential Geometry. Springer-Verlag 1995

[KoNo] Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of differential Geometry. John Wiley & Sons 1969

[MySt] Myers, S., Steenrod, N.: The Group of Isometries of a Riemannian Manifold. Annals of Mathematics 1939 http://www.jstor.org/

[Pal] Palais, R.: A global formulation of the Lie Theory of Transformation Groups. American Mathematical Society 1957 http://vmm.math.uci.edu/PalaisPapers/AGloblFormlationOfLieTheory.pdf

[Schl] Schlecht, J.: Die Isometriegruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Abschlussarbeit. https://www.math.uni-tuebingen.de/user/loose/studium/Diplomarbeiten/SA.Schlecht.pdf

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe und ich zum ersten mal eine Bachelorarbeit in diesem Studiengang einreiche.

Berlin, den 05.02.2015 Datum, Unterschrift